ТЕМА 14. ОГЛЯД ОСНОВНИХ НАПРЯМКІВ І ПІДХОДІВ СИНЕРГЕТИКИ ТА НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ

План

1. Принцип підпорядкування Хакена та параметри порядку
2. Показники Ляпунова
3. Дискретні відображення
4. Аналіз економічних часових рядів методами нелінійної динаміки

Література

1. *Багриновский К. А.* Модели и методы экономической кибернетики. — М.: Экономика, 1973. — 206 с.
2. *Бир Ст.* Кибернетика и управление производством. — М.: Физматгиз, 1963. — 275 с.
3. *Браславец М. Е., Гуревич Т. Ф.* Кибернетика. — К.: Вища шк., 1977. — 325 с.
4. *Винер Н.* Кибернетики или управление и связь в животном и машине. — М.: Сов. радио, 1958. — 216 с.
5. *Глушков В. М.* Введение в кибернетику. — К.: Изд-во АН УССР, 1964. — 324 с.
6. *Кобринский Н. Е.* Основы экономической кибернетики. — М.: Экономика, 1969. — 255 с.

До основних математичних методів дослідження в синергетиці належить теорія динамічних систем, яка ґрунтуються на якісній теорії диференціальних рівнянь. З-поміж сучасних напрямків досліджень у рамках синергетики та нелінійної динаміки можна виокремити такі:

- *Розробка методів описування істотно нерівноважних процесів на основі статистичної фізики*. У межах цього напрямку створюються кінетичні моделі, визначаються параметри, необхідні для шуканого опису, виявляються кореляції, масштабні флуктуації, установлюються закономірності переходу до стану рівноваги.
- *Термодинаміка відкритих систем* вивчає стаціонарні стани, тобто стани, що зберігають стійкість у певному діапазоні зміни зовнішніх впливів, досліджує умови самоорганізації — виникнення впорядкованих структур із невпорядкованих. У межах цього напрямку було показано, що процеси дисипації енергії є необхідною умовою самоорганізації (тому такі структури дістали назву *дисипативних*).
- *Дослідження якісного поводження розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь*, що визначають далекі від рівноваги стани залежно від зміни вхідних параметрів. Цей напрямок дістав назву *теорії катастроф*. За її допомогою описуються якісні перебудови загальної структури систем — катастрофи, а також визначаються межі стійкості та зміни структури станів. Принагідно зазначимо, що втрата системою стійкості називається катастрофою, а точніше, ***катастрофа** — це стрибкоподібна зміна структури або закону функціонування системи, що виникає внаслідок повільної зміни зовнішніх умов.*

З огляду на обмежений обсяг цього посібника, а також на різноманітність методів і підходів сучасної синергетики, складність відповідного математичного апарату та значний обсяг матеріалу тут немає змоги розглянути зазначені наукові напрямки докладніше. А втім, кожний із них висвітлюється в численних спеціальних працях. Зокрема, для першого ознайомлення можна скористатися джерелами, перелік яких наведено наприкінці цього розділу. Тут ми спинимося на кількох основних методах і підходах, які можна безпосередньо застосовувати, досліджуючи економічні системи.

1. Принцип підпорядкування Хакена та параметри порядку

Дослідники, аналізуючи функціонування макроекономіки, економіки регіону, сектора, галузі чи підприємства й намагаючись урахувати численні фактори та взаємозв'язки, часто змушені будувати математичні моделі (системи) великої розмірності, що містять десятки або й сотні параметрів і рівнянь. Аналітичний аналіз таких моделей доволі складний і становить окрему проблему, а через це їх важко застосовувати на практиці та інтерпретувати здобувані результати.

Проте існує спосіб редукції відповідних систем до систем рівнянь значно меншої розмірності, завдяки чому вдається подати якісний опис об’єкта за допомогою кількох диференціальних рівнянь. Ідея цього методу полягає в тому, що коли йдеться про опис динаміки системи, не всі її параметри (або процеси, які вони характеризують) мають однакові часові масштаби зміни. Деякі параметри стану (швидкі змінні) можна виразити через інші (повільні змінні) — так звані ***параметри порядку***, у результаті чого кількість незалежних змінних зменшується. Можливість подати швидкі змінні як функції параметрів порядку становить зміст *принципу підпорядкування Хакена*. Але варто зауважити, що задовго до Хакена цей метод був запропонований О. Тихоновим і відомий як теорема Тихонова. Розглянемо, у чому полягає її ідея.

Розглянемо процес спрощення моделі у вигляді системи n автономних нелінійних диференціальних рівнянь [2]:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \quad i = \overline{1, n}.$$

Нехай після деяких перетворень систему можна впорядкувати за малим параметром при похідній, тобто подати у вигляді:

$$r^2 \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad i = 1, 2, ..., l;$$

$$r \frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, ..., x_n), \quad j = l + 1, ..., m;$$

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, ..., x_n), \quad k = m + 1, ..., n;$$

де r — малий параметр ($r < 1$).

Щоб досліджувати поводження системи на короткострокових (порядку r^2) і на довгострокових (порядку 1) часових інтервалах, необхідно розглядати повну систему. А коли йдеться про поводження системи на середньострокових часових інтервалах (порядку r), то її рівняння з параметром r^2 описують досить швидкі процеси, а рівняння з параметром 1, навпаки — досить повільні. Тому можна вважати, що за час $T \propto r$ змінні x_k не зазнають істотних змін, а отже, у рівняннях, що залишилися, ці повільні змінні можна замінити їх початковими значеннями, знизивши розмірність системи на $n - (l + m)$. Діючи так і далі, ми можемо зредуціювати вихідну систему до системи розмірністю l.

Параметри порядку й принцип підпорядкування належать до числа найбільш фундаментальних понять синергетики. З економічного погляду принцип підпорядкування означає, що можна знайти невелику кількість змінних (можливо, агрегованих, перетворених тощо), які визначають динаміку всієї економічної системи в околі особливої точки, а решта змінних залежить від них.

2. Показники Ляпунова

Одним із найважливіших результатів синергетики став висновок стосовно принципової обмеженості довжини часового горизонту прогнозу поводження навіть для порівняно простих систем. Це стосується систем, чутливих до початкових умов. Отже, якщо розглядати дві близькі траєкторії $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ динамічної системи

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}), \ \bar{x}_1(0) = \bar{a}, \ \bar{x}_2(0) = \bar{a} + \bar{\varepsilon},$$

то відстань між спочатку нескінченно близькими траєкторіями $d(t)$ зростатиме з часом в середньому експоненціально:

$$d(t) = \left|\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)\right| \cong \left|\bar{\varepsilon}\right| \exp(\lambda t).$$

Величина λ називається показником Ляпунова і характеризує горизонт передбачуваності — проміжок часу, на який можна дати прогноз поводження досліджуваної системи. Існує по одному показнику Ляпунова для кожного з вимірів фазового простору.

Формально показники Ляпунова динамічної системи $\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x})$ визначаються виразом:

$$\lambda_i = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln\left|\tilde{x}_i(t)\right|,$$

де $\tilde{x}_i(t)$ — i-те власне значення матриці, складеної з перших частинних похідних від вектор-функції $f(\bar{x})$ за компонентами вектора $\bar{x}$ (матриці Якобі).

Додатний показник Ляпунова характеризує розтягування фазового простору, або швидкість розбігання близьких точок. Від'ємний показник Ляпунова відбиває стиснення, тобто швидкість, з якою система відновлюється після збурення.

Впорядкований за спаданням такий набір показників утворює *спектр показників Ляпунова* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ і дає змогу класифікувати атрактори (табл. 15.1).

Таблиця 15.1

КЛАСИФІКАЦІЯ АТРАКТОРІВ

Тип атрактора	Розмірність фазового простору	Знаки показників Ляпунова
Нерухома точка	1	(–)
Нерухома точка	2	(–, –)
Граничний цикл	2	(0, –)
Нерухома точка	3	(–, –, –)
Граничний цикл	3	(0, –, –)
Двовимірний тор	3	(0, 0, –)
Дивний атрактор	3	(+, 0, –)

Існують різні підходи до кількісного визначення показників Ляпунова, наприклад, алгоритм Бенеттіна (Benettin) [5; 12]. Розглянемо дві траєкторії, що виходять з близьких точок x_0 та $\tilde{x}_0^0$, де $\left|\tilde{x}_0^0 - x_0\right| = \varepsilon$. Візьмемо деякий часовий інтервал T і, розв'язавши чисельно рівняння динаміки, знайдемо вектори стану в момент T: $x(T) = x_1$, $\tilde{x}(T) = \tilde{x}_1$. Відношення $\left|\tilde{x}_1\right|/\varepsilon$ характеризує зміну довжини (у загальному випадку норми) вектора збурень за час T. Далі візьмемо інший вектор такого самого напрямку завдовжки ε, тобто $\tilde{x}_1^0 = \varepsilon\tilde{x}_1/\left|\tilde{x}_1\right|$. Далі продовжимо процедуру чисельного розв'язування рівняння з початковою точкою $x_1 + \tilde{x}_1^0$. Діставши вектори стану та збурень у момент $2T$: $x(2T) = x_2$, $\tilde{x}(2T) = \tilde{x}_2$, обчислимо відношення $\tilde{x}_2^0 = \varepsilon\tilde{x}_2/\left|\tilde{x}_2\right|$ і т. д. (див. рис. 15.1).

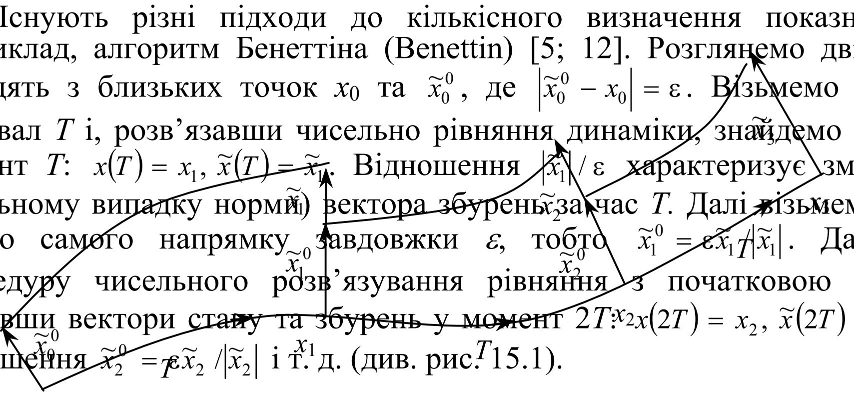

Рис. 15.1. Ілюстрація до відшукання старшого показника Ляпунова за алгоритмом Бенеттіна

Однак цей алгоритм передбачає, що нам відома математична модель динамічної системи. Коли ця модель невідома, ми не знаємо ні матриці Якобі, ні розмірності фазового простору, і тому необхідні інші алгоритми. Так, Вольф (Wolf) запропонував алгоритм розрахунку найбільшого показника Ляпунова за реалізацією часового ряду, ідею якого викладено, наприклад, у [5].

3. Дискретні відображення

Якщо стан системи характеризується однією змінною x, тобто розмірність фазового простору дорівнює одиниці, а оператор еволюції задається рекурентним співвідношенням:

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad (15.1)$$

де n — дискретний час; $f : J \to J$ — неперервне відображення замкненого інтервалу J дійсної числової прямої в себе, то таке співвідношення називають *одновимірним дискретним відображенням*.

Точку $p \in J$ називають *невиродженою періодичною точкою з періодом k*, якщо $f^k(p) = p$, де $f^k(p)$ — k-та ітерація f-орбітою.

І хоча вираз (15.1) на перший погляд здається надто простим, такі відображення доволі корисні під час аналізу складних систем. Розглянемо кілька типових ситуацій, коли доводиться використовувати дискретні відображення як математичні моделі динамічних процесів [6].

1. *Відображення як моделі процесів із дискретним часом.* або коли ми маємо Ідеться про спостереження за процесом у дискретні моменти часу n = 1, 2, 3, …, а отже, у такому разі природно вважати змінну $x(n)$, або як її часто позначають x_n, дискретною Скажімо, числові значення багатьох економічних змінних (ВВП, індекси цін, обсяги зовнішньої торгівлі тощо) вдається знайти, як правило, у певні дискретні моменти часу.

2. *Відображення, що виникають у результаті застосування методу Ейлера до розв'язування диференціальнихх рівнянь.* Розглянемо, наприклад, модифіковану модель Мальтуса, яка описує динаміку чисельності населення (популяції):

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(1 - N),$$

що пропорційна кількості населення N. Якщо $0 < N(0) < 1$, то $N(t) \to 1$ при $t \to \infty$. Застосувавши до цього рівняння метод Ейлера, після заміни змінних дістанемо дискретне відображення:

$$N_{k+1} = aN_k - bN_k^2.$$

3.*Відображення, що виникають у процесі чисельного розв'язуванні нелінійних алгебраїчних рівнянь.* Так, розв'язуючи рівняння виду $x = F(x)$, будують послідовність $\{x_n\}$, яка збігається до кореня $\tilde{x}$. Це можна зробити методом простої ітерації, згідно з яким $x_{n+1} = F(x_n)$, або методом Ньютона: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}$.

В обох випадках дістаємо дискретні відображення.

4. *Побудова відображень як метод обробки експериментальних даних.* Нехай ми спостерігаємо перебіг деякого складного процесу $x(t)$. Позначимо його локальні максимуми через M_k. На площині $\{M_k, M_{k+1}\}$ відкладатимемо точки з координатами (M_k, M_{k+1}), тобто перша точка буде (M_1, M_2), друга (M_2, M_3) і т. д. Як з'ясувалося для багатьох процесів точки $\{M_k, M_{k+1}\}$ з високою точністю належать однозначним неперервним кривим $M_{n+1} = f(M_n)$. Існування такої функції f дає змогу в деяких випадках будувати прості моделі, за допомогою яких за попередніми локальними максимумами вдається знаходити наступні, прогнозуючи характер та поводження досліджуваного процесу.

Для одновимірних неперервних відображень здобуто кілька цікавих результатів. Передусім це теорема Шарковського та її частинний випадок, який дослідили американські математики Лі та Йорке [4; 5]. Так, згідно з результатами Лі та Йорке, якщо відображення (15.1) має цикл періоду 3, то воно має нескінченну множину циклів решти періодів і нескінченну множину хаотичних траєкторій.

Єдина вимога, що накладається на функцію $f(x)$, — це її неперервність. Отже, навіть прості системи можуть поводитися хаотично.

Цей результат є частковим випадком *теореми Шарковського*.

Якщо неперервне відображення одновимірного інтервалу в себе має цикл періоду m, то воно має також усі можливі цикли періоду k, що передують числу m у переліку всіх цілих чисел, записаних у так званому порядку Шарковського:

$$1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd 2^3 \lhd 2^4 \lhd \ldots \lhd 2^3 \cdot 9 \lhd 2^3 \cdot 7 \lhd 2^3 \cdot 5 \lhd 2^3 \cdot 3 \lhd \ldots$$

$$\lhd 2^2 \cdot 9 \lhd 2^2 \cdot 7 \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd 2^2 \cdot 3 \lhd \ldots \lhd 2 \cdot 9 \lhd 2 \cdot 7 \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 3 \lhd \ldots ;$$

$$\ldots \lhd 9 \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3 .$$

Найцікавішим для економічного аналізу є так зване *логістичне відображення*:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (N - x_n),\ 0 \le x_n \le N .$$

Завдяки аналізу логістичного відображення було з’ясовано багато спільних властивостей одновимірних відображень, зокрема так званий *сценарій переходу до хаосу Фейгенбаума*. Щоб розкрити його суть, побудуємо графік $x(\lambda)$ (біфуркаційну діаграму). На осі x відкладатимемо значення $x_1, x_2, \ldots x_k$, що містяться на стійкому циклі або на іншому атракторі, а по осі λ — значення параметра (рис. 15.2). Циклу порядку 2 відповідатимуть дві точки на одній вертикалі, порядку 4 — чотири точки і т. д. Позначимо через $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ значення параметра, при яких відбуваються подвоєння, а через $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ значення параметра, при яких точка $x = 0{,}5$ є елементом циклу порядку два, чотири і т. д. Нехай d_1, d_2 … — відстані між прямою $x = 0{,}5$ та найближчою точкою відповідного циклу.

Фейгенбаум показав, що значення точок біфуркації Λ_n прямує до границі:

$$\Lambda_\infty = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n = -1{,}401155\ldots .$$

При цьому відношення d_n / d_{n+1} також прямує до границі, яка дорівнює — 2,5029... .

Ще один висновок полягає в тому, що відношення довжин суміжних інтервалів між біфуркаціями також прямують до границі:

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\Lambda_n - \Lambda_{n-1}}{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n} = 4{,}669162\ldots .$$

Константу d називають *сталою Фейгенбаума* та використовують для прогнозування досягнення області хаосу. Можна показати, що інтервал між Λ_0, Λ_∞ приблизно дорівнює $\frac{d}{d-1}\left(\Lambda_2 - \Lambda_1\right)$.

Сценарій виникнення неперіодичного руху, хаотичного атрактора в результаті біфуркацій подвійного періоду спочатку було досліджено для логістичного відображення. Пізніше було здобуто строгі результати, що дозволяють виявляти класи одновимірних відображень, для яких перехід до хаосу характеризується сценарієм Фейгенбаума.

Але експериментальні дослідження та комп’ютерне моделювання багатьох нелінійних систем показали, що їм притаманна послідовність біфуркацій подвійного періоду, а значення біфуркаційних параметрів і амплітуди циклів характеризуються тими самими універсальними константами. При цьому досліджувані явища можуть описуватися багатовимірними відображеннями, автономними або неавтономними системами звичайних диференціальних рівнянь або рівняннями в частинних похідних. Отже, широкий клас нелінійних явищ не тільки демонструє однакову якісну поведінку, а й має універсальні кількісні характеристики.

4. Аналіз економічних часових рядів методами нелінійної динаміки

Стохастичні характеристики атракторів. Щоб схарактеризувати атрактори, корисно ввести поняття розмірності. Розмірність визначає кількість інформації, необхідної для визначення координат точки, що належить атрактору в межах заданої точності. У попередній темі було введено поняття фрактальної розмірності [див. (14.2)]. Більш строго, *фрактальною розмірністю атрактора* в n-вимірному фазовому просторі називають величину

$$d_F = \lim_{r \to \infty} \left[\ln(N(r)) / \ln(1/r) \right], \qquad (15.2)$$

де $N(r)$ — мінімальна кількість n-вимірних кубів з ребром r, необхідних для покриття атрактора.

Фрактальна розмірність дивних атракторів буде дробовою. Зауважимо, що у формулі для обчислення фрактальної розмірності однаково важливі всі непорожні n-вимірні куби. Це істотний недолік, оскільки дивні атрактори просторово неоднорідні, а деякі області атрактора відвідуються траєкторією частіше за інші. Отже, необхідно знати доволі довгу траєкторію, щоб гарантувати відвідування навіть малоймовірних кубів. З цією метою кожний непорожній куб доводиться зважувати за допомогою відносної частоти, з якою він відвідується типовою траєкторією. Розмірності, які визначаються з урахуванням імовірності відвідування траєкторією різних областей атрактора у фазовому просторі, називають *імовірнісними*.

Інформаційна розмірність атрактора визначається наступним чином:

$$d_I = \lim_{r \to \infty} \left[\ln(I(r)) / \ln(1/r) \right], \quad I(r) = -\sum_{i=1}^{N(r)} p_i \ln(p_i), \qquad (15.3)$$

де $I(r)$ — кількість інформації, необхідної для визначення стану системи в межах необхідної точності $1/r$. Якщо атрактор просторово однорідний, то $d_I = d_F$, інакше $d_I < d_F$.

Інша розмірність, яка також належить до класу й, називається *кореляційною* та визначається співвідношенням:

$$d_C = \lim_{r \to \infty} \left[\frac{\ln \sum_{i=1}^{N(r)} p_i}{\ln(1/r)} \right], \qquad (15.4)$$

де p_i^2 — ймовірність того, що пара точок атрактора належить i-му кубу (імовірність того, що одна точка попаде в i-й куб, буде p_i; за припущення, що трапляння двох точок у i-й куб — незалежні події, імовірність цієї події становитиме p_i^2).

Кореляційну розмірність можна також подати у вигляді:

$$d_C = \lim \left[\ln C(r) / \ln(1/r) \right],$$

$$C(r) = \lim \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^{M} \theta\left[r - \rho(x_i, x_j) \right] \equiv C_m(r), \qquad (15.5)$$

де M — кількість спостережень, $\rho(x_i, x_j)$ — відстань між точками x_i та x_j, θ — функція Хевісайда: $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Величина $C_m(r)$ називається *кореляційним інтегралом* (сумою) та визначає ймовірність того, що відстань між двома точками x_i та x_j буде меншою за $1/r$. Зауважимо, що всі три розмірності атракторів, які було розглянуто раніше, є частинними випадками *розмірності Реньї*:

$$d_q = \lim \left[\ln I_q(r) / \ln(1/r) \right], \quad I_q(r) = \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^{N(r)} p_i^q. \qquad (15.6)$$

При $q = 0$ розмірність Реньї збігається з фрактальною розмірністю, при $q = 1$ — з інформаційною, при $q = 2$ — з кореляційною розмірністю. Для цілих q розмірність Реньї має таку інтерпретацію: великі додатні q визначають області атрактора, які відвідуються найчастіше, а великі від'ємні значення визначають області, що майже не відвідуються. Таким чином, діапазон розмірності Реньї можна розглядати як характеристику ступеня просторової неоднорідності атракторів.

Алгоритми реконструкції атракторів. Одним із перспективних напрямків досліджень у рамках нелінійної динаміки є розробка так званих «*алгоритмів реконструкції атракторів*». Це новий клас методів обробки часових рядів, породжуваних детермінованими динамічними (хаотичними) системами. Головна ідея застосування цих методів полягає в тому, що основна структура хаотичної системи, яка містить всю інформацію про систему, а саме атрактор динамічної системи, може бути відновлена через спостереження поводження самої цієї динамічної системи, фіксованої як часовий ряд.

Розглянемо ідею методу Грасбергера і Прокачі (Grassberger, Procaccia), відповідно до якого процедура реконструкції фазового простору і відновлення хаотичного атрактора системи зводиться до побудови лагового простору. Припустимо, що даний часовий ряд породжено деякою хаотичною динамічною системою. Припустимо, що m — найменша розмірність фазового простору, в який можна «занурити» реальний атрактор динамічної системи.

Тоді за допомогою часового ряду X_n, $n = 1,2, \ldots N$, «відновлений» атрактор формується з векторів $Y_n = (X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-(m-1)})$ у m-вимірному просторі, що називається *лаговим простором* досліджуваного часового ряду. Якщо часовий ряд справді є спостережуваною «проекцією» хаотичної динамічної системи, то згідно з теоремою Такенса реальний атрактор динамічної системи і «атрактор», відновлений у лаговому просторі за часовим рядом згідно з наведеним щойно правилом, у разі адекватного добору розмірності вкладення m матимуть однакові узагальнені фрактальні розмірності, показники Ляпунова та інші числові характеристики.

Якщо ж аналізований часовий ряд є реалізацією випадкового процесу, то відновлений «псевдоатрактор» являтиме собою безструктурну хмару точок, яка у процесі послідовного збільшення розмірності вкладення лагового простору m, неначе газ, заповнюватиме весь наданий йому об'єм.

Один із тестів, що застосовується на практиці для з'ясування наявності хаотичної детермінованості в досліджуваному часовому ряді (наприклад, індексах акцій, валютних курсів та ін.), полягає у вивченні властивостей кореляційної суми (інтеграла) $C_m(r)$ і поводження кореляційної розмірності d_C залежно від розмірності вкладення m. Як уже зазначалося, кореляційний інтеграл $C_m(r)$ — це ймовірність того, що дві точок на відновленому атракторі в m-вимірному лаговому просторі містяться в межах відстані r одна від одної.

Якщо графік функції $\log C_m(r)$ відносно $\log(r)$ має чітко виражену лінійну ділянку, це вказує на самоподібну геометрію (топологію) атрактора, що, у свою чергу, говорить про хаотичний характер поводження системи, яка «породжує» цей часовий ряд. Кореляційна розмірність обчислюється як середній нахил зазначеного графіка, а помилка обчислення береться як половина різниці максимального і мінімального нахилу. Зі зростанням розмірності вкладення кореляційна розмірність збільшується. Однак для хаотичних даних кореляційна розмірність буде зрештою насичуватися при її справжньому значенні.

Для випадкових даних такого насичення не спостерігається і кореляційна розмірність зростатиме монотонно. Таке поводження кореляційної розмірності пояснюється тим, що в рамках методу Грасбергера—Прокачі кореляційна розмірність для реальних хаотичних систем є непоганим наближенням для фрактальної розмірності дивного атрактора. Фрактал, вкладений у простір з вищою розмірністю, зберігає свою справжню розмірність через нелінійні кореляції між точками. Тому для детермінованого хаотичного часового ряду кореляційна розмірність збігається до свого справжнього значення. Водночас для випадкової послідовності точки відновленого «псевдоатрактора» утворять безструктурну хмару в лаговому просторі незалежно від його розмірності.

Отже, методи реконструкції атракторів дають змогу з'ясувати, наскільки складною має бути модель досліджуваної системи (скільки в неї має бути ступенів волі або параметрів порядку, наскільки тривалим може бути часовий інтервал, на якому можна прогнозувати поводження цієї системи).

R/S аналіз. Поряд із кореляційним та спектральним аналізом одним із потужних методів дослідження довготермінової пам'яті в часових рядах та з'ясування ступеня їхньої фрактальності є застосування R/S-аналізу (Rescaled Range Analysis), який був запропонований Херстом (Hurst) у гідрології під час вивчення коливань річкових стоків. Б. Мандельброт узагальнив метод Херста з метою дослідження часових рядів довільної природи. Ідея цього методу полягає у вимірюванні зміни з часом рівня нагромадження відхилень від середнього значення часового ряду [9; 12]. Було з'ясовано, що для деяких часових рядів залежність R/S від кількості спостережень N має такий емпіричний закон розподілу:

$$(R/S)_n = (R/S)_0 N^H,$$

де $(R/S)_0$ — константа; N — кількість часових періодів спостережень, H — експонента Херста. $(R/S)_n$ визначається так:

$$(R/S)_n = \frac{\max\limits_{1\le t\le N} A(t,N) - \min\limits_{1\le t\le N} A(t,N)}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum\limits_{t=1}^{\tau}\left(S(t) - \langle S\rangle_N\right)}},$$

де $A(t, N)$ — нагромадження відхилення часового ряду $S(t)$ від середнього за N періодів $\langle S\rangle_N$:

$$A(t,N) = \sum_{i=t}^{t+N}\left(S(i) - \langle S\rangle_N\right).$$

Якщо показник H приблизно дорівнює 0,5, то це свідчить про те, що ряд описує випадкове блукання. Коли H відрізняється від 0,5, то це означає, що спостереження не незалежне. Тобто кожне спостереження містить «пам'ять» про минулі спостереження, минуле поводження ряду, причому не короткотермінову, а саме довготермінову пам'ять.

Якщо $0 \le H \le 0,5$ — то ряд буде від'ємно корельованим (*антиперсистентним*), тобто якщо спостерігалася тенденція зростання ряду в минулому, то варто очікувати надалі на його спадання. А якщо $0,5 \le H \le 1$ — ряд буде додатно корельованим (*персистентним*), або трендостійким. Тобто якщо ряд зростає (спадає) в минулому, то ймовірно, що така сама тенденція збережеться протягом деякого часу в майбутньому. Показник Херста пов'язаний із фрактальною розмірністю співвідношенням: $d_F = 2 - H$.

На практиці для оцінювання показника H часто використовують метод, який полягає в побудові функції лінійної регресії $\log(R/S) = H\log N + \varepsilon$. Якщо побудувати графік цієї регресії в подвійних логарифмічних координатах, то оцінкою показника Херста в цьому випадку буде коефіцієнт нахилу H цієї прямої.

Дослідження, проведені останнім часом (див., наприклад, [9]), свідчать, що багато фінансово-економічних часових рядів, таких як курси акцій, валютні курси, фондові індекси та інші економічні індикатори, мають статистику Херста більш як 0,5, тобто мають фрактальну структуру, або довгострокову пам'ять.