## *ТЕМА 10.* ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ І УПРАВЛІННЯ

**План**

1. Регулятори зворотного зв’язку
2. Елементи теорії лінійних операторів
3. Кібернетична інтерпретація дій з операторами
4. Застосування принципів теорії автоматичного управління (ТАУ) в економіці

**Література**


1.*Акоф Р. Л.* Планирование в больших экономических системах. Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1972. — 223 с.
2.*Александров А. Г.* Оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1989. — 263 с.
3.*Андрейчиков А. В., Андрейчикова О. Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике. — М.: Финансы и статистика, 2000. — 368 с.
4.*Анфилатов В. С., Емельянов А. А., Кукушкин А. А.* Системный анализ в управлении. — М.: Финансы и статистика, 2002. — 368 с.
5.*Виханский О. С.* Стратегическое управление. — М.: Гардарики, 1999. — 296 с.
6.*Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э.* Математические основы теории управляемых систем. — М.: Наука, 1969. — 512 с.


### *1. Регулятори зворотного зв’язку*

Під ***автоматичним регулюванням*** розуміють управління штучними системами, здійснюване без безпосередньої участі людини. Проте за такого типу управління людина може входити до контуру управління, виконуючи координаційні функції диспетчера або оператора за допомогою сучасних засобів обробки інформації.

Розглянемо найпростішу модель автоматичного регулювання, що складається з двох систем — об’єкта регулювання $S$ і регулятора $R$ (рис. 11.1). Ця система регулювання пов’язана з навколишнім середовищем тільки за допомогою входів і виходів і є порівняно відособленою системою. Якщо система має один вхід і один вихід, то їхній стан у кожний момент часу можна позначити відповідно $x \in X$, $y \in Y$. Це можуть бути як скалярні, так і векторні величини.

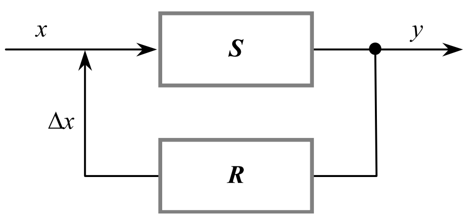


Рис. 11.1. Зворотний зв’язок у системі регулювання

У наведеній схемі процес регулювання ґрунтується на використанні зворотного зв’язку: регульована система $S$ впливає на регулятор $R$, а він, у свою чергу, впливає на регульовану систему.

Схема автоматичного регулювання являє собою замкнене кільце, яке називається ***контуром регулювання***. Коли разом із замкненим контуром розглядається і задавальний блок, який не входить у замкнений ланцюг, але коригує параметри регулювання, то говорять про ***управління***. Отже, поняття управління, як уже зазначалося, ширше за поняття регулювання.

Розглянемо алгоритм функціонування системи автоматичного регулювання. У системі $S$ відбувається перетворення вхідної величини $x$ на вихідну величину $y$. Позначимо оператор цього перетворення через $S$: $y = Sx$.

Стан виходу $Y$ регульованої системи подається на вхід регулятора $R$, що перетворює його на стан свого виходу $\Delta x$. Позначивши через $R$ оператор перетворення, здійснюваного в регуляторі, дістанемо $\Delta x = Ry$. Стан виходу регулятора додається до значення стану входу $x$ системи S. Остаточно стан входу системи $S$ буде $x + \Delta x$. Отже, відхилення на вході системи $S$ залежатимуть від стану її виходу $y$.

Нехай задача регулювання полягає у стабілізації вихідної величини системи. Позначимо через $y_0$ бажаний стан виходу регульованої системи. Відповідне настроювання регулятора $R$ полягає в тому, щоб величина $\Delta x$ викликала вирівнювання відхилення стану виходу $y$ від заданого значення $y_0$ і в такий спосіб наближала стан виходу системи до заданого, тобто до $y = y_0$.

Припустимо, що оператори перетворень, здійснюваних системою $S$ та регулятором, є операторами пропорційності. Тоді у перетвореннях $y = Sx$ і $\Delta x = Ry$ символи $S$ і $R$ будуть числами — коефіцієнтами пропорційності. Якщо $R < 1$, то регулятор послаблюватиме сигнал, а якщо $R > 1$, то підсилюватиме. У разі, якщо величини $y$ і $x$ є скалярами, $S = y / x$ і $R = \Delta x / y$ називаються відповідно ***пропускною здатністю*** системи і регулятора.

Отже, додавши поправку $\Delta x = Ry$ на вхід системи, дістанемо такий остаточний стан виходу регульованої системи:

$$y = S(x + \Delta x) = S(x + Ry) = Sx + SRy\,.$$

Звідси випливає ***основна формула теорії автоматичного регулювання***:

$$y = \frac{S}{1 - SR}x\,.$$

Співмножник $(1 / 1 - SR)$ відбиває зворотний зв'язок у системі регулювання і називається ***мультиплікатором***. Вираз $(S / 1 - SR)$ називають ***пропускною здатністю*** системи регулювання.

Іноді формулу регулювання наводять у такому вигляді:

$$y = \frac{S}{1 + SR}x\,.$$

Пропускна здатність регулятора $R$ позначається тоді зі знаком «мінус» для того, щоб звернути увагу на протилежний напрям зв'язку регулятора із системою. Крім того, у системах автоматичного регулювання використовується від'ємний зворотний зв'язок.

Отже, формула теорії регулювання відбиває зв'язок між станом виходу і входу регульованої системи з урахуванням поправки, що її вводить регулятор $R$. Ця формула дає змогу визначити, яким має бути стан входу (рівень настроювання), щоб при даних значеннях $S$ і $R$ можна було дістати бажаний результат.

**Економічна інтерпретація основної формули теорії автоматичного управління (ТАУ).** Розглянемо як приклад мультиплікатор Кейнса. Можна побачити, що мультиплікатор зворотного зв'язку $(1 / 1 - SR)$ за своїм виглядом нагадує ***мультиплікатор Кейнса***. Покажемо, що мультиплікатор Кейнса і справді можна розглядати як особливий випадок мультиплікатора зворотного зв'язку.

Згідно з кейнсіанською теорією національний дохід $Y$ розглядається як загальна сума чистих (після відшкодування зносу засобів виробництва) виплат в економіці та складається з двох доданків: виплат $A$, призначених на інвестиції, та виплат $C$, що йдуть на закупівлю споживчих благ. Другий доданок вважається лінійною функцією від національного доходу, тобто $C = cY$, де $c$ — ***коефіцієнт споживання***, який задовольняє умову $0 < c < 1$. Це означає, що не весь національний дохід витрачається на споживання.

Отже маємо:

$$Y = A + C = A + cY,$$

звідки

$$Y = \frac{1}{1-c} AY,$$

де величина $(1 / 1 - c)$ — так званий ***мультиплікатор Кейнса***.

Подібність між основною формулою теорії регулювання та цією формулою дає підстави для іншого тлумачення мультиплікатора Кейнса.

Нехай маємо деяку систему, в яку здійснюють певні капіталовкладення — їх називають ***незалежними*** або ***автономними капіталовкладеннями*** — що вимірюються величиною $x = A$. Пропускна здатність цієї системи становить $S = 1$. Це означає, що капіталовкладення $A$ тягнуть за собою витрати, що їм дорівнюють. Ця система має зворотний зв'язок із регулятором, пропускна здатність якого є $R = c$. Після того як регулятор вніс поправку, сумарний вплив на першу систему буде $Y = A + c$. У підсумку дістанемо систему регулювання, описану в підрозд. 9.5, причому пропускна здатність регульованої системи в цьому разі дорівнює 1, а пропускна здатність регулятора — $c$.

Зі сказаного випливає, що дія описаної системи регулювання ідентична дії системи без зворотного зв'язку з пропускною здатністю $(1 / 1 - c)$, яка дорівнює мультиплікатору Кейнса.

Розглянемо далі, яке практичне застосування може мати основна формула регулювання в економіці. По-перше, усю систему регулювання, що складається з регульованої системи $S$ і регулятора $R$, можна замінити єдиною системою з пропускною здатністю $(S / 1 - SR)$. По-друге, на підставі основної формули автоматичного регулювання можна зробити деякі розрахунки.

Якщо стан виходу системи $y$ має задане значення $z$, то значення входу $x$ (рівень настроювання системи регулювання) має становити

$$x = \frac{1 - SR}{S} z.$$

Для системи, пропускна здатність якої дорівнює мультиплікатору Кейнса, а стан входу є обсягом капіталовкладень $A$, ця формула набирає вигляду

$$A = (1 - c)\,z.$$

Тоді можна виконати наступний розрахунок. Припустимо, що $P$ є чистою продукцією, якій відповідає зайнятість $aP$, де $a$ — коефіцієнт трудомісткості чистої продукції. Якщо $N_0$ — кількість людей, яких необхідно забезпечити роботою, то обсяг чистої продукції становитиме $P_0 = N_0 / a$. Для реалізації такого обсягу чистої продукції національний дохід має дорівнювати $P_0$, тобто $Y = P_0$.

Отже, задане значення $Y$ буде $z = P_0$. Звідси дістаємо:

$$A = (1 - z)P_0.$$

Це означає, що обсяг капіталовкладень має бути пропорційним до заданого обсягу чистої продукції, причому коефіцієнт пропорційності дорівнює $1 - c$.

Можна також визначити пропускну здатність регулятора $R$, яка потрібна для того, щоб за даної пропускної здатності регульованої системи $S$ і заданого рівня настроювання $x$ досягти заданого значення $y = z$. За цих умов пропускна здатність системи регулювання визначається формулою:

$$R = \frac{z - SX}{Sz}.$$

Якщо пропускна здатність системи регулювання дорівнює мультиплікатору Кейнса і рівень настроювання дорівнює обсягу капіталовкладень $A$, то

$$c = \frac{z - A}{z}.$$

Цей вираз можна застосувати до розв'язання такої економічної задачі.

Задано обсяг капіталовкладень $A_0$ та стан виходу $z = Y = P_0$, що забезпечує зайнятість населення на рівні $N_0$. Необхідно знайти значення коефіцієнта споживання $c$, тобто визначити, яку частину доходів населення потрібно спрямувати на споживання, щоб ця задача могла бути розв’язаною.

Підставляючи відповідні значення, дістаємо:

$$c = \frac{P_0 - A_0}{P_0}.$$

Ця формула визначає пропускну здатність регулятора, що перетворює дохід на споживчі витрати. Якщо пропускна здатність регулятора відповідає цій величині, тобто якщо є можливість вплинути на розподіл доходу таким чином, щоб коефіцієнт споживання $c$ набув значення, зумовленого щойно наведеною формулою, то дана вище задача має розв’язок.

Задане значення $z$ за даного рівня настроювання $x$ забезпечується в тому разі, якщо пропускна здатність регулятора прямо пропорційна до відхилення (збурювання) $z - Sx$, що виникло б за відсутності регулятора та обернено пропорційно до $Sz$, тобто до рівня настроювання, що був би необхідний за відсутності регулятора.

Для розглянутої економічної задачі, як з’ясовується, коефіцієнт споживання має бути прямо пропорційним до різниці між обсягом чистої продукції, що відповідає заданому рівню зайнятості, і заданим обсягом капіталовкладень та обернено пропорційним до обсягу чистої продукції.

## *2. Елементи теорії лінійних операторів*

Основну формулу теорії регулювання $y = (S / 1 - SR)\,x$ було виведено за умови, що $S$ і $R$ є операторами пропорційного перетворення, яке відбувається відповідно в регульованій системі та в регуляторі, тобто в обох системах відбуваються перетворення, що полягають у множенні стану входу на дійсні числа $S$ і $R$. Покажемо тепер, що основна формула теорії регулювання має значно ширший спектр застосування. Зокрема, умова про здійснення тільки пропорційного перетворення може бути замінена більш загальною передумовою. З цією метою розглянемо основні положення *операторного числення*.

Процес перетворення стану входу $x$ системи на стан виходу $y$ можна записати в термінах відображень:

$$\forall x \in X,\ \ \exists y \in Y,\ \ T : x \to y,$$

або $y = Tx$.

Символ $T$ називається ***оператором перетворення***, який визначає, що необхідно зробити зі станом $x$ на вході, щоб одержати стан $y$ на виході. Сукупність правил виконання алгебраїчних дій над операторами називається ***операторним численням***.

Розглянемо найпростіший клас операторів — ***лінійні оператори***. Це оператори, що задовольняють такі дві умови:

$$\forall x \in X,\ \forall y \in Y,\ \forall c \in R^1:$$
$$T(cx) = cT(x), \quad c = \text{const};$$
$$T(x + y) = T(x) + T(y).$$

Перша з цих умов означає, що перетворення $T$ величини $cx$ (де $c = \text{const}$) рівнозначне перетворенню $T$ величини $x$ з подальшим множенням результату на сталу $c$, а отже, цю сталу можна винести за знак оператора.

Інша умова означає, що лінійні оператори мають властивість адитивності — перетворення суми величин $x$ і $y$ рівнозначне сумі того самого перетворення величини $x$ і величини $y$.

Найпростіший лінійний оператор — оператор пропорційного перетворення, який перетворює стан входу $x$ на стан виходу $y$ за допомогою множення стану входу на деяке дійсне число: $y = kx$, де $k = \text{const}$. Стала $k$ називається ***коефіцієнтом перетворення***.

Зауважимо, що стала $k$ не є оператором пропорційного перетворення, оскільки в даному разі оператор — це правило: «помножити $x$ на $k$».

До основних лінійних операторів належать:

1. ***Оператор пропорційного перетворення*** або ***оператор пропорційності***. Його дія полягає у множенні стану входу $x$ на стале дійсне число.

2. ***Оператор диференціювання***. Якщо стан входу $x$ є неперервною функцією деякого параметра $t$, тобто $x = f(t)$, то цей оператор означає, що для досягнення визначеного стану виходу необхідно продиференціювати функцію $f(t)$, тобто визначити похідну цієї функції. Оператор диференціювання позначається $d/dt$ або символом $D$. З диференціального числення відомо, що при відшуканні похідної виконуються умови лінійності перетворення, оскільки $Dcx = cDx$ і $D(x + y) = Dx + Dy$.

3. ***Оператор (невизначеного) інтегрування***, дія якого полягає в тому, що стан виходу визначається як первісна (інтеграл) стану входу $x = f(t)$. Цей оператор позначається символом невизначеного інтеграла $\int ...dt$ (чи символом $D^{1}$, оскільки інтегрування є оператором, оберненим до диференціювання). Це лінійний оператор, оскільки сталу можна винести за знак інтеграла, і, крім того, інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів.

4. ***Різницевий оператор***, який позначається символом $\Delta$. Його дія полягає ось у чому. Якщо множину можливих значень станів входу системи можна подати у вигляді ряду $x_1, x_2, ..., x_n$, то оператор $\Delta$ перетворить стан входу $x_i$ на різницю $x_{i+1} - x_i$, або $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Цей оператор також є лінійним, оскільки

$$\Delta cx_i = cx_{i+1} - cx_i = c(x_{i+1} - x_i) = c\Delta x_i\,;$$

$$\Delta(x_i + y_i) = x_{i+1} + y_{i+1} - x_i - y_i = \Delta x_i + \Delta y_i\,.$$

5. ***Оператор підсумовування*** позначається символом $\sum$. Його дія полягає в підсумовуванні станів входу за деяким індексом $i$.

6. ***Оператор правого зсуву*** (***випередження***), що позначається символом $E$. Якщо множину можливих значень входу системи можна подати у вигляді ряду $x_1, x_2, ..., x_n$, то оператор $E$ перетворить стан входу $x_i$ на стан виходу $y = x_{i+1}$ . Отже, $Ex_i = x_{i+1}$.

7. ***Оператор лівого зсуву*** (***запізнювання***) аналогічний оператору випередження, але стан входу $x_i$ тут перетвориться в стан виходу $x_{i-1}$. Якщо позначити його через $E^{-1}$, то $E^{-1}x_i = x_{i-1}$. Неважко переконатися, що три останніх оператори також лінійні.

У техніці ці оператори мають такі відповідно назви: пропорційний перетворювач (залежно від призначення — підсилювач чи послаблювач), диференціатор, інтегратор, пристрій випередження чи затримки.

Розглянемо основні алгебраїчні дії, які можна виконувати з операторами перетворення.

***Сумою двох операторів*** називається вираз:

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x.$$

Це означає, що сума операторів $T_1$ і $T_2$, застосованих до $x$, приводить до того самого результату, що й застосування до $x$ спочатку оператора $T_1$, а потім оператора $T_2$ з наступним додаванням здобутих результатів. Аналогічно визначається ***різниця двох операторів***.

***Добуток двох операторів*** визначається рівністю:

$$T_2\, T_1x = T_2\,(T_1x),$$

яка означає, що застосування до $x$ добутку операторів $T_1$ і $T_2$ полягає в послідовному перетворенні $x$ за допомогою $T_1$, а потім — у перетворенні здобутого результату оператором $T_2$.

Зауважимо, що добуток операторів не обов'язково є комутативним. Тому перетворення $x$ спочатку за допомогою оператора $T_1$, а потім за допомогою оператора $T_2$ може дати інший результат, ніж перетворення, виконані у зворотному порядку.

За означенням ***n-а степінь оператора*** $\boldsymbol{T^n}$, де $n$ — натуральне число, є *n-кратний добуток* (повторення) того самого перетворення:

$$T^n x = T(T^{n-1}\, x).$$

Символом $T^{-1}$ позначається ***обернений оператор***. Зміст цього оператора полягає в тому, що коли $T$ є оператором перетворення $x$ на $y$, то $T^{-1}$ є оператором перетворення $y$ на $x$: якщо $y = Tx$, то $x = T^{-1}y$.

Визначення оператора $T^{-1}$ дає змогу подати відношення операторів:

$$\frac{T_1}{T_2} = T_1 T_2^{-1}.$$

Введемо поняття *тотожного перетворення*, оператор якого позначимо через $T^0$ або через $I$. У разі тотожного перетворення величина $x$ перетворюється на ту ж величину $x$: $T^0 = Ix = x$. Якщо перетворення пропорційне, то $I$ є оператором перетворення, дія якого полягає у множенні на 1 ($I = 1$).

З означення оберненого оператора випливає, що

$$T\,T^{-1} = T^{-1}T = T^0 = I.$$

Означені щойно дії з операторами дають змогу одні з розглянутих основних лінійних операторів виражати через інші. Наприклад, оператор (невизначеного) інтегрування можна замінити оператором, оберненим до оператора диференціювання; оператор випередження тотожний оператору, оберненому до оператора запізнювання тощо.

Різницевий оператор $\Delta$ можна подати за допомогою оператора випередження $E$. Справді:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = Ex_i - x_i = (E-1)x_i$$

і, отже, $\Delta \equiv E - 1$ (різницевий оператор тотожний різниці між оператором випередження та оператором тотожного перетворення).

Оператор підсумовування також можна подати за допомогою оператора випередження:

$$\sum_{i=1}^{n} \equiv \frac{E^n - 1}{E - 1}.$$

Отже, сім основних лінійних операторів можна подати за допомогою комбінації лише трьох ***елементарних лінійних операторів***: оператора пропорційності, оператора диференціювання та оператора правого зсуву (випередження).

Доведемо тепер, що основна формула теорії регулювання справджується для будь-яких перетворень, що відбуваються в регульованій системі та у регуляторі (за умови лінійності операторів).

Припустимо, що в регульованій системі відбувається довільне перетворення $y = Sx$, де оператор перетворення $S$ є лінійним. У регуляторі за допомогою зворотного зв’язку до системи підімкнено регулятор, в якому відбувається перетворення $\Delta x = Ry$, де $R$ — також довільний лінійний оператор. Отже, дістанемо систему регулювання, в якій відбувається таке перетворення:

$$y = S(x + \Delta x) = S(x + Ry).$$

Оскільки оператори $S$ і $R$ лінійні, то виконується співвідношення

$$y = S(x + Ry) = Sx + SRy, \quad y - SRy = Sx.$$

Звідси випливає, що $(I - SR)y = Sx$, і, оскільки $I = 1$, дістанемо основну формулу теорії регулювання:

$$Y = (I - SR)^{-1} SX,$$

яка виконується, якщо оператори лінійні.

Таким чином, операторне числення є дуже зручним засобом дослідження систем регулювання, адже над операторами можна виконувати алгебраїчні дії та діставати формули за аналогією з діями над числами.

### *3. Кібернетична інтерпретація дій з операторами*

Відповідно до визначених основних дій з операторами розглянемо, як визначаються складні оператори для систем за різних типів з’єднань блоків та підсистем.

Розглянемо ситуацію, коли деякий стан $x$ характеризує загальний вхід двох систем із лінійними операторами $T_1$ і $T_2$, а результатом перетворення стану $x$ є два стани виходів відповідних систем $y_1$ і $y_2$, що підсумовуються. Здобуту суму позначимо через $y$. Таке з’єднання двох систем називається ***паралельним*** (рис. 11.2, *а*).

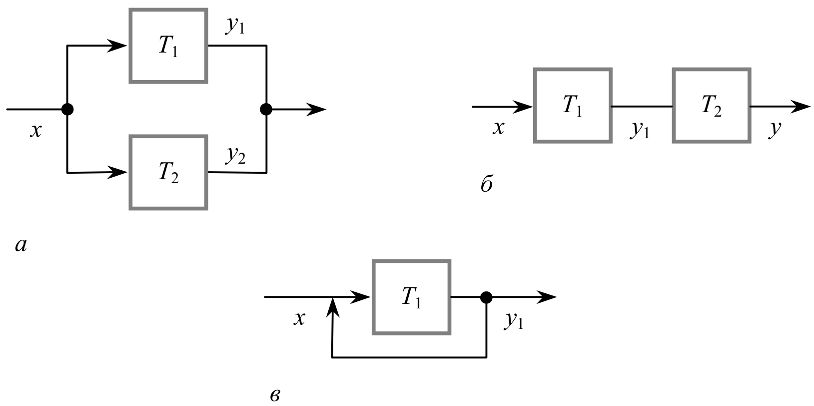


Рис. 11.2. Паралельне (*а*), послідовне (*б*) та зворотне (*в*) з’єднання систем

У даному випадку операторні формули мають вигляд: $y_1 = T_1x$, $y_2 = T_2x$, звідки

$$y = y_1 + y_2 = T_1x + T_2x = (T_1 + T_2)\,x.$$

Результат такої дії можна подати за допомогою одного перетворення $y = Tx$, де $T = T_1 + T_2$.

Звідси випливає таке твердження: *оператор перетворення, в якому дві системи з’єднані паралельно, дорівнює сумі операторів окремих систем.*

Це правило можна узагальнити методом індукції на скінчену або злічену кількість паралельно з’єднаних систем.

Розглянемо тепер послідовний зв’язок (***послідовне з’єднання***) двох систем з лінійними операторами $T_1$ і $T_2$ (рис. 11.2, *б*). У разі послідовного з’єднання стан виходу однієї системи є станом входу іншої. Тоді $y_1 = T_1x$ та $y = T_2y$. Підставляючи перше перетворення замість $y_1$ у формулу другого перетворення, дістаємо $y = T_2T_1x$ — перетворення, рівносильне одному перетворенню $y = Tx$, оператор якого $T = T_2T_1$.

Отже, *оператор, що відповідає послідовному з’єднанню двох систем, дорівнює добутку операторів цих систем.* Сформульований висновок методом індукції можна також поширити на довільну (скінченну або злічену) кількість послідовно з’єднаних систем. У техніці послідовне з’єднання низки систем часто називається ***каскадом***.

Оскільки лінійним операторам можна поставити у відповідність «пропускну здатність» (абсолютне значення) відповідних перетворень, то наведені щойно два правила можна сформулювати інакше:

- сукупна пропускна здатність систем, з’єднаних паралельно, дорівнює сумі пропускних здатностей цих систем;
- сукупна пропускна здатність систем, з’єднаних послідовно, дорівнює добутку пропускних здатностей цих систем.

Розглянемо третій тип з’єднання, який має важливе значення в кібернетичних системах — *зворотний зв’язок* (рис. 11.2, *в*). Позначивши перетворення у двох системах, з’єднаних зворотним зв’язком, через $y = T_1x$ і $\Delta x = T_2y$, дістанемо відому вже формулу:

$$y = \frac{T_1}{1 - T_1 T_2} x .$$

Це співвідношення рівносильне перетворенню $y = Tx$, де $T = T_1 / (1 - T_1 T_2)$. Отже, з'єднання двох систем за допомогою зворотного зв'язку приводить до того, що оператор першої системи $T_1$ множиться на $1 / (1 - T_1 T_2)$. Цей останній «співмножник» і є ***оператором зворотного зв'язку***. У разі, коли $T_1$ і $T_2$ пропорційні до перетворення, цей оператор рівносильний згадуваному вже коефіцієнту зворотного зв'язку.

Розглянемо два складніших випадки з'єднання систем. У першому випадку припустимо, що існує регульована система, якій відповідає оператор $S$ та з'єднані з нею паралельно дві системи зворотного зв'язку або два регулятори з операторами відповідно $R_1$ і $R_2$ (рис. 11.3, а).

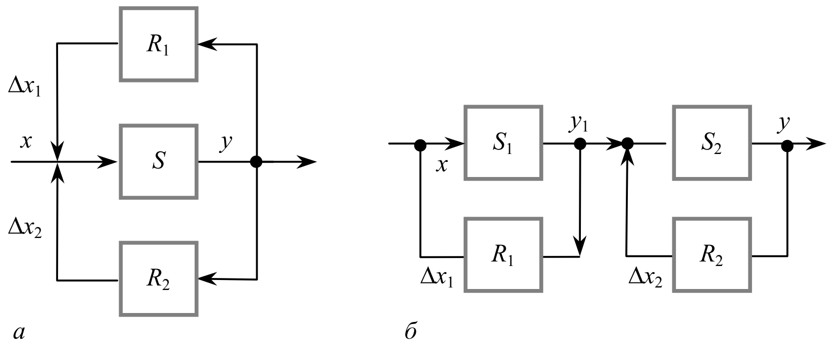


Рис. 11.3. Схема паралельного (*а*) та послідовного (*б*) з'єднання контурів регулювання

Сумарний результат дії цієї системи регулювання можна записати у вигляді одного перетворення $y = Tx$. Позначимо через $\Delta_1 x$ і $\Delta_2 x$ стани виходів відповідно першого та другого регуляторів. Тоді, врахувавши, що $\Delta_1 x = R_1 y$ та $\Delta_2 x = R_2 y$, дістанемо:

$$y = S(x + \Delta_1 x + \Delta_2 x) = S(x + R_1 y + R_2 y) = Sx + SR_1 y + SR_2 y.$$

Звідси знаходимо стан виходу:

$$y = \frac{S}{1 - S(R_1 + R_2)} x.$$

Отже, в даному випадку результуючий оператор усієї системи регулювання є $T = (1 - S(R_1 + R_2))^{-1} S$. Здобутий результат аналогічний тому, який дістали б, замінивши два паралельно з'єднаних регулятори одним регулятором з оператором $R = R_1 + R_2$. Це означає, що замість двох паралельно з'єднаних регуляторів можна поставити один, пропускна здатність якого дорівнює сумі пропускних здатностей окремих регуляторів. Цей висновок можна поширити на довільну скінченну або зліченну кількість регуляторів, з'єднаних паралельно.

У другому випадку припустимо, що система регулювання складається з двох регульованих систем, з'єднаних між собою послідовно, з операторами відповідно $S_1$ і $S_2$, причому кожна з цих систем обладнана регуляторами зворотного зв'язку з операторами відповідно $R_1$ і $R_2$ (рис. 11.3, *б*).

Стан входу першої системи позначимо через $x_1$, виходу — через $y_1$, стан виходу другої системи — через $y$.

Сумарний результат роботи такої системи запишемо у вигляді одного перетворення $y = Tx$. Згідно зі здобутими щойно висновками дістаємо:

$$y_1 = \frac{S_1}{1 - S_1 R_1} x \quad \text{і} \quad y = \frac{S_2}{1 - S_2 R_2} y_1 .$$

Тому можемо записати:

$$y = \frac{S_2}{1 - S_2 R_2} \frac{S_1}{1 - S_1 R_1} x.$$

Звідси маємо результуючий оператор розглянутої системи регулювання:

$$T = \left(1 - S_2 R_2\right)^{-1} S_2 \left(1 - S_1 R_1\right)^{-1} S_1.$$

Наведемо кібернетичну інтерпретацію оператора оберненого перетворення $T^{-1}$. Таке перетворення означає, що коли $y = Tx$, то $x = T^{-1}y$.

Аналогічно можна довести, що нульове перетворення $y = (T - T)x = 0$ — це результат паралельного з’єднання системи з оператором $T$ та системи з оператором $(-T)$, а оператор $(-T)$ — результат послідовного з’єднання системи з оператором $T$ та системи з оператором пропорційного перетворення $(-1)$.

Розглянуті приклади складних систем можна застосувати до розв’язування конкретних економічних задач. Так, національний дохід $y$, що дорівнює загальній сумі виплат в економіці, розкладемо на три складові: $y = c + I + A$, де $c$ — споживання; $I$ — індуковані (чи вторинні) інвестиції, обсяг яких залежить від розміру національного доходу; $A$ — незалежні капіталовкладення, обсяг яких не залежить від національного доходу.

Припустимо далі, що $c = c_1 Y$ і $I = c_2 Y$, причому коефіцієнт споживання $0 < c_1 < 1$, а коефіцієнт індукованих капіталовкладень $0 < c_2 < 1$; окрім того, $c_1 + c_2 < 1$. Тоді дістанемо $Y = c_1 Y + c_2 Y + A$, звідки

$$Y = \frac{1}{1 - (c_1 + c_2)} A.$$

Отже, оператор перетворення $y = TA$, що відбувається в розглянутій складній системі, набирає вигляду $T = 1 / (1 - (c_1 + c_2))$. Цей вираз — розгорнута форма мультиплікатора Кейнса.

У регульованій системі відбувається тотожне пропорційне перетворення з оператором $S = 1$. Це означає, що незалежні капіталовкладення перетворюються на дохід, що дорівнює цим капіталовкладенням. З регульованою системою паралельно з’єднано два регулятори з операторами $c_1$ і $c_2$. Комплекс систем такого роду можна замінити системою, що складається з регульованої системи і лише одного регулятора з оператором $c_1 + c_2 = c$. Тоді мультиплікатор Кейнса набере колишнього вигляду $1 / 1 - c$ з тією лише різницею, що тут $c$ є сумою коефіцієнтів споживання та індукованих капіталовкладень.

Комплекс, що складається з двох послідовно з’єднаних регульованих систем з оператором $S = 1$, кожну з який обладнано регулятором з операторами відповідно $c_1$ і $c_2$, можна інтерпретувати з економічного погляду в такий спосіб.

У першій регульованій системі та відповідному їй регуляторі відбувається перетворення $B_1 = c_1 Y_1 + A$, тобто $Y = (1 / 1 - c_2) A$. Нехай ця система позначає країну, що одержує зовнішню позику в розмірі $c_2 Y_1$, тобто в розмірі, пропорційному до виробленого в ній національному доходу. Цей додатковий фактор (зовнішня позика) зумовлює перетворення, здійснюване у другій регульованій системі та в її регуляторі: $Y = Y_1 + c_2 Y$, звідки

$$Y = \frac{1}{1 - c_2} Y_1.$$

Отже, підставляючи вираз для $Y_1$, остаточно дістаємо:

$$Y = \frac{1}{1 - c_2} \frac{1}{1 - c_1} A.$$

Таким чином, результуючий оператор розглянутої складної системи є добутком мультиплікаторів обох послідовно з'єднаних систем регулювання.

З проведеного аналізу можна зробити такі висновки. Кібернетична інтерпретація дій з операторами, що відповідають різного роду з'єднанням, дає змогу обчислити результуючий оператор дії цілого комплексу систем. Звідси випливає, що кожна система, оператор якої можна подати у вигляді суми, різниці, добутку або відношення інших операторів, становить комплекс систем, якось з'єднаних між собою.

Системи, в яких відбувається перетворення за допомогою елементарних перетворень або обернених до них операторів, називаються ***елементарними системами***, або ***елементами***.

Тому всі системи являють собою або елемент, або комплекс елементів, певним чином з'єднаних між собою, оскільки кожну алгебраїчну дію з елементарними операторами можна тлумачити як відповідне з'єднання елементів.

### *4. Застосування принципів теорії автоматичного управління (ТАУ) в економіці*

Теорія автоматичного управління (регулювання) широко застосовується в управлінні складними технічними системами, зокрема технологічними процесами. Економічні системи управління відрізняються від технічних більшою складністю, нелінійністю, наявністю численних прямих і зворотних зв'язків, інтенсивністю інформаційних потоків, багатокомпонентністю, стохастичністю, і тому, зрозуміло, моделі автоматичного регулювання недостатньо адекватні реальним економічним процесам та явищам. Але загальні ідеї ТАУ, а часто і спільні математичні закони можуть бути корисними під час аналізу економічних явищ.

Застосування принципів ТАУ під час дослідження економічних систем можна здійснювати в кількох напрямках.

*Напрямок перший*. Моделі ТАУ можна інтерпретувати в термінах економічних систем, використовуючи таку інтерпретацію для виявлення структури та контурів взаємодії окремих підсистем. Такі моделі дають змогу виявляти важкоспостережувані канали інформаційних взаємодій в економіці.

*Напрямок другий* пов'язаний із застосуванням принципів зворотних зв'язків в управлінні економічними системами та побудовою таких механізмів регулювання, які б забезпечили стійке й ефективне функціонування економічних систем в умовах зміни зовнішнього середовища.

*Напрямок третій*. Застосування принципів ТАУ в економіці пов'язаний з тим, що незалежно від свідомої діяльності людей на функціонування економіки впливають такі механізми регулювання, яким притаманні риси автоматизму. Але, на відміну від технічної кібернетики, в економіці замість терміна «автоматичне регулювання» використовується термін ***саморегуляція***, який означає самостійне реагування економічної системи на зовнішні збурювальні впливи.

Деякі приклади інтерпретації економічних явищ за допомогою ТАУ було наведено у двох попередніх підрозділах.

Подамо загальні міркування про використання ТАУ для з'ясування інформаційних потоків в економічних системах. Економічні процеси внаслідок своєї об'єктивної природи завжди являють собою процеси керовані. Тому економічні системи, що їх відбивають, розглядаються в більшості досліджень і розробок як кібернетичні системи, тобто з позицій дослідження управління як процесу переробки інформації.

Саме з розгляду властивостей і особливостей управління в економіці випливають всі вимоги до економічної інформації: до її змісту, кількості, класифікації, режимів обробки та форм подання. Економічна інформація взагалі існує лише остільки, оскільки вона забезпечує управління в економіці. Економічна інформація — це все те, що потрібно знати для здійснення управління та розв’язання конкретних задач управління в економіці, тобто відомості про об’єкти, середовище, цілі, дії, способи досягнення цілей тощо.

Чимало об’єктів, що розглядаються як системи, мають вельми складні властивості, наприклад складне (неоднозначне) поводження, складну мету і т. ін. Більшість таких властивостей характерна для економічних систем.

Саме з огляду на складність задачі, що постають для таких систем, доцільно скористатися тут найпростішою з кібернетичних моделей — стандартною моделлю автоматичного регулювання. Як уже зазначалося, застосування моделей такого типу до дослідження економічних систем викликає певні заперечення, оскільки моделі автоматичного регулювання, призначені для опису простіших технічних систем та механічних агрегатів, безумовно, недостатньо достовірно відображають набагато складніші економічні процеси і явища. Проте ми скористаємося такою моделлю тільки на концептуальному рівні, щоб виявити деякі важкоспостережувані канали інформації в економіці та суспільстві.

Візьмемо стандартну схему автоматичного регулювання (рис. 11.4). Об’єкт управління (ОУ) конкретно інтерпретується залежно від розглядуваної економічної системи будь-якого рівня. Це може бути виробничий або інший агрегат, підприємство, галузь, економічні суспільні відносини, економіка в цілому. Регулятор, або пристрій управління (ПУ), також набуває відповідного сенсу в даній системі: робітник-оператор; орган управління; комплекс актів економічного законодавства; уся система управління економікою тощо.

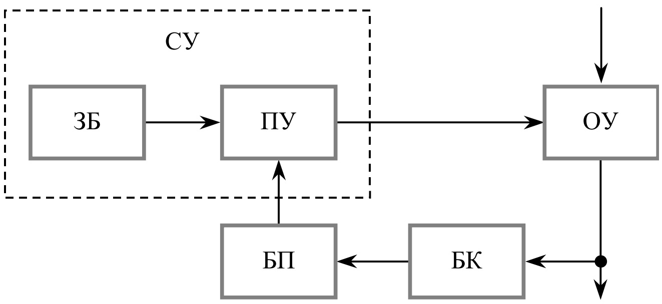


Рис. 11.4. Схема автоматичного регулювання

Передаючи командну інформацію, регулятор змінює поводження регульованого об’єкта. Команди виробляються відповідно до «статутного» настроювання регулятора, що може інтерпретуватися як мета управління. Настроювання приладу автоматичного регулювання виконує оператор, а мету управління вводить у систему задавальний блок (ЗБ).

Блок контролю (БК) реєструє поводження об’єкта, що є первинним джерелом інформації зворотного зв’язку. Блок порівняння (БП) оцінює напрями та розміри відхилень поводження об’єкта від заданого блоком регулювання, переробляючи й перетворюючи інформацію зворотного зв’язку. Блоки БК і БП в економічних системах інтерпретуються як системи контролю, обліку, статистики. Перероблена інформація зворотного зв’язку надходить до регулятора для вироблення нових команд.

Інформаційне кільце буде простим контуром регулювання. Контур управління (розімкнений) охоплює і блок ЗБ, тобто мету управління та критерій його ефективності.

Ця схема обминає питання про те, яким має бути настроювання регулятора, тобто звідки у процесі управління беруться цілі й критерії регулювання. І це природно, оскільки воно взагалі не є предметом розгляду теорії автоматичного регулювання. Застосовуючи цю схему до вивчення економічних систем, необхідно брати до уваги їхній ієрархічний характер, розвиваючи схему регулювання до великої системи. Цільова установка для кожного економічного об’єкта задається ззовні з боку його надсистеми.

Простіше за все зазначена ситуація трактується в ієрархічній структурі органів управління: виробнича дільниця отримує установку від управління цеху, цех — від керівництва підприємства, яке враховує інтереси власників та керується законодавством, нормативними актами й директивами міністерства тощо.

Але, виявляється, цього недостатньо для адекватного відображення процесів управління в суспільстві та економіці. Діяльність кожного економічного об'єкта є багатоплановою, адже підприємство не тільки випускає продукцію, а й поліпшує, модернізує її; веде самостійну господарську діяльність; забезпечує зайнятість населення і формування його доходів; функціонує як соціальний осередок суспільства. Очевидно, що економічна система управління має бути подана як складна система, а модель автоматичного регулювання — не лише як ієрархічна, а й багатоконтурна.

Регулювання в контурі будь-якого рангу здійснюється не за одним, а за цілою низкою настроювань, що одночасно співіснують і задаються з різних контурів управління, що відбивають багатоплановість економічного та соціального життя. В органах управління відповідно співіснують і безперервно взаємодіють різні типи установ, що керують різними аспектами функціонування одних і тих самих об'єктів — функціональних, лінійних (галузевих), територіальних органів тощо.

У ТАУ вважається, що кожна нижня ланка виконує розпорядження вищої ланки, причому ці розпорядження абсолютно точні й вичерпні. Це справді так щодо машинних комплексів. Але в економічних системах, в органах господарського управління команда, що передається від вищої ланки управління до нижчої, звичайно має доволі загальний характер, потребуючи уточнення, деталізації, конкретизації тощо.

Конкретизуючи вказівки вищої ланки, нижча ланка керується також власними інтересами. Так, підприємство, отримавши від галузевих органів управління основні показники плану виробництва, розробляє свій план виробничо-господарської діяльності, виходячи також з інтересів забезпечення максимальної рентабельності.

Для врахування цих «власних інтересів» ланок економічної системи необхідно розрізняти два типи контурів регулювання. Контури регулювання першого типу — їх називають адміністративними важелями управління — ґрунтуються на індивідуальному впливі, їх прийнято. Це безпосередні команди: обсяг і номенклатура основної продукції, виділені основні та оборотні кошти, загальний фонд заробітної плати, фонди матеріально-технічного постачання.

Другий тип контурів регулювання — їх називають економічними важелями управління — має універсальний характер. Це певні законодавчі положення стосовно відрахувань прибутків до фонду підприємства, щодо заходів з матеріального і морального заохочення підприємства загалом і кожного члена його колективу в результатах роботи. Взаємодією цих універсальних контурів регулювання і визначаються власні інтереси колективів підприємств, виробничих об'єднань, галузей народного господарства. Як «вбудовані регулятори економіки» їх інтенсивно досліджує економетрика.

Кожний із контурів регулювання діє ефективно тільки у взаємодії з іншими контурами. Так само як у паралельно з'єднаних провідниках виникає індукція струму, якщо в деяких із них змінюється напруга, у контурах економічного регулювання виникає інформація, коли починають діяти окремі з них.

Окремі контури економічного регулювання не тільки взаємодіють між собою, а й можуть замінювати один одного. Основна проблема організації управління економікою зводиться до вибору такого поєднання контурів економічного управління, яке б забезпечувало найкраще співвідношення централізованих безпосередніх методів адміністративного управління з децентралізованими, економічними важелями управління.