ТЕМА 7. **СТАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ**

План

1. Виробничі функції
2. Балансові моделі
3. Економіко-математична модель міжгалузевого балансу

Література:

1. *Браверман Э. М.* Математические модели планирования и управления в экономических системах. — М.: Наука, 1976. — 368 с.
2. *Вітлінський В. В.* Моделювання економіки: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2003. — 408 с.
3. *Геєць В., Скрипниченко М., Соколик М., Шумська С.* Секторальні макромоделі прогнозування економіки України // Економіст. — 1998. — № 5. — С. 58—67.
4. *Гранберг А. Г.* Математические модели социалистической экономики: Учеб. пособие для экон. вузов и фак. — М.: Экономика, 1978. — 351 с.
5. *Иванилов Ю. П., Лотов А. М.* Математические модели в экономике. — М.: Наука, 1979. — 304 с.
6. *Колемаев В. А.* Математическая экономика: Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ, 1998. — 240 с.

1. Виробничі функції

Поняття виробничої функції (ВФ) виникло з огляду на потребу відбити залежність між обсягом продукції, що виробляється, і компонентами витрат ресурсів (праці та капіталу). Американський економіст П. Дуглас помітив, що співвідношення доходів від праці та капіталу в національному доході США майже не змінюється з часом. Цей висновок підтвердили подальші емпіричні дослідження для різних країн світу.

Описуючи виробничу підсистему економіки за допомогою ВФ, цю підсистему розглядають як «чорну скриньку», на вхід якої подаються ресурси X_1, X_2, …, X_n, а на виході отримуються річні обсяги різноманітної готової продукції Y_1, Y_2, ..., Y_k. Як фактори виробництва на макрорівні здебільшого розглядають виробничі фонди K (капітал) та працю L, а як результати виробництва — валовий випуск продукції (ВВП або НД) Y (рис. 7.1).

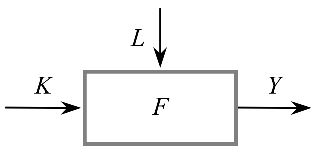

Рис. 7.1. Виробнича функція

Отже, економіку моделюють нелінійною ВФ

$Y = F(K, L)$.

Розглянемо найпоширеніші класи ВФ, що застосовуються для моделювання економіки.

ВФ називається ***неокласичною***, якщо вона є гладкою та задовольняє такі умови:

- $F(0, L) = F(K, 0) = 0$ — за відсутності одного з факторів виробництво неможливе;
- $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$ — зі зростанням витрат ресурсів виробництво зростає;
- $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ — зі зростанням витрат ресурсів швидкість зростання виробництва спадає;
- за необмеженого зростання одного з факторів випуск продукції зростає також необмежено.

Мультиплікативна ВФ має такий вигляд (для двох факторів):

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0,$$

де α_1, α_2 — коефіцієнти еластичності.

Частинним випадком такої ВФ є функція Коба—Дугласа, для якої виконується умова $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Беручи до уваги технологічний прогрес, до моделі часто включають множник $\exp(\lambda t)$. Однією з переваг зазначеної моделі є те, що вона стає лінійною після логарифмування:

$$\ln Y_t = \alpha_1 \ln K_t + \alpha_2 \ln L_t + \lambda t,$$

де індекс $t = 1, \ldots, T$ показує момент часу (або номер спостереження) за факторами виробництва та випуском. Тоді невідомі параметри можна знайти методом найменших квадратів (МНК) за допомогою стандартних пакетів прикладних програм (наприклад, MS Excel, Eviews, SAS тощо).

Можна легко переконатись, що мультиплікативні ВФ задовольняють перші дві умови для неокласичних функцій. Справді, знайдемо перші частинні похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 K^{\alpha_1 - 1} L^{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 Y}{K} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2 - 1} = \frac{\alpha_2 Y}{L} > 0,$$

оскільки $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.

Частинні похідні випуску за факторами — так звані ***граничні продукти***, або ***граничні ефективності, факторів*** — відповідають приросту випуску на одиницю приросту фактора. Неважко переконатись, що мультиплікативна ВФ задовольняє також умови 3 і 4 для неокласичних ВФ.

Подамо економічну інтерпретацію параметрів $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Для цього введемо поняття ***еластичностей*** як логарифмічних похідних факторів за випуском:

$$\alpha_K = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln K} = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{(\Delta Y / Y)}{(\Delta K / K)}, \quad \alpha_L = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln L} = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{(\Delta Y / Y)}{(\Delta L / L)}.$$

Оскільки в розглядуваному випадку $\ln Y = \alpha_1 \ln K + \alpha_2 \ln L$, то

$$\alpha_K = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln K} = \alpha_1, \quad \alpha_L = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln L} = \alpha_2.$$

Отже, коефіцієнти еластичності показують, на скільки відсотків зросте випуск, якщо фактор зросте на 1 %. При $\alpha_1 > \alpha_2$ спостерігається інтенсивне зростання, у протилежному випадку — екстенсивне виробництво.

Ізоквантою називають геометричне місце точок на площині K, L, що відповідає одному й тому самому рівню випуску продукції, тобто $F(K, L) = Y_0 = \text{const}$. Звідси випливає, що на ізокванті

$$dF = \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL = 0.$$

Граничною нормою заміни праці фондами та фондів працею називаються відповідно такі співвідношення:

$$S_K = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}, \; S_L = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L}, \; S_K S_L = 1.$$

Для мультиплікативної ВФ норма заміни праці фондами прямо пропорційна до фондоозброєності:

$$S_K = \frac{\alpha_2 K}{\alpha_1 L} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} k, \;\; k = K / L.$$

Ізоклінами називають лінії найбільшого зростання ВФ. Ізокліни ортогональні до ліній нульового зростання — ізоквант. Оскільки напрям найбільшого зростання задається градієнтом $\mathrm{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial L} \right)$, то рівняння ізоклінали подається у вигляді:

$$\frac{dK}{(\partial F / \partial K)} = \frac{dL}{(\partial F / \partial L)}.$$

Схематичне зображення ізоквант та ізоклін наведено на рис. 7.2.

Виробнича функція називається ***однорідною*** ступеня γ, якщо $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\gamma F(K, L)$. Отже, мультиплікативна ВФ буде однорідною ступеня $\alpha_1 + \alpha_2$.

Розглянемо ще один клас ВФ — зі ***сталою еластичністю заміни факторів*** (CES-функції). Для них виконується рівність $\frac{dK / k}{dS / s} = \sigma = \mathrm{const}$.

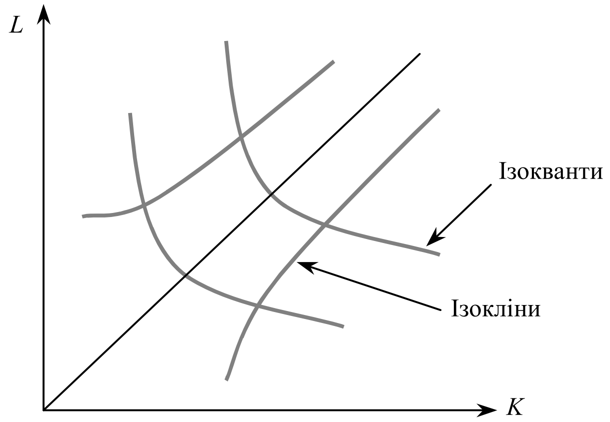

Рис. 7.2. Ізокванти та ізокліни для ВФ

У загальному вигляді ВФ цього класу можна подати так:

$$Y = F(K, L) = \left[\alpha K^{-\rho} + (1 - \alpha) L^{-\rho} \right]^{-\frac{\gamma}{\rho}},$$

де $\rho = \frac{1 - \sigma}{\sigma}$.

2. Балансові моделі

Балансові моделі як статистичні, так і динамічні широко застосовуються в економіко-математичному моделюванні. В основу створення цих моделей покладено балансовий метод — метод взаємного зіставлення наявних матеріальних, трудових і фінансових ресурсів та потреб у них. Описуючи економічну систему в цілому, під її ***балансовою моделлю*** розуміють систему рівнянь, кожне з яких виражає вимогу балансу між виробленою окремими економічними об’єктами кількістю продукції та сукупною потребою в цій продукції. За такого підходу економічна система складається з економічних об’єктів, кожний з яких випускає деякий продукт. Частину останнього споживають інші об’єкти системи, а решта виводиться за межі системи як її кінцевий продукт.

Якщо замість поняття «продукт» ввести загальніше поняття «ресурс», то під балансовою моделлю потрібно розуміти систему рівнянь, що задовольняють вимоги відповідності між наявним ресурсом та його використанням. Крім наведеної щойно вимоги стосовно відповідності виробництва кожного продукту і потребі в ньому розглядають також балансову відповідність як відповідність наявності робочої сили фактичній кількості робочих місць або платоспроможного попиту населення наявній пропозиції товарів і послуг тощо. При цьому під відповідністю розуміють достатність ресурсів для покриття потреби і, отже, існування деякого резерву.

Найважливіші види балансових моделей:

- часткові матеріальні, трудові та фінансові баланси для економіки в цілому та окремих її галузей;
- міжгалузеві баланси;
- матричні баланси підприємств і фірм.

Балансовий метод є основним інструментом для аналізу пропорцій в економіці. Балансові моделі на базі звітних балансів характеризують сформовані пропорції, причому їхня ресурсна частина завжди дорівнює видатковій.

Для виявлення диспропорцій використовуються балансові моделі, в яких фактичні ресурси зіставляються не з їх фактичним споживанням, а з потребою в них. З огляду на це балансові моделі не містять механізму порівняння окремих варіантів економічних рішень і не передбачають взаємозамінюваності різних ресурсів, через що унеможливлюється вибір оптимального варіанта розвитку економічної системи. Саме в цьому полягає обмеженість балансових моделей і балансового методу в цілому.

Основу інформаційного забезпечення балансових моделей в економіці становить ***матриця коефіцієнтів витрат ресурсів за конкретними напрямками їх використання***. Скажімо, у моделі міжгалузевого балансу зазначену роль відіграє так звана технологічна матриця — таблиця міжгалузевого балансу, складена з коефіцієнтів (нормативів) прямих витрат на виробництво одиниці продукції в натуральному виразі. З багатьох причин вихідні дані реальних господарських об’єктів не можуть бути використані в балансових моделях безпосередньо, тому підготовка інформації для введення в модель є доволі важливою проблемою.

Так, будуючи модель міжгалузевого балансу (МГБ), застосовують специфічне поняття ***чистої***, або ***технологічної галузі***, тобто умовної галузі, яка поєднує все виробництво відповідного продукту незалежно від відомчої (адміністративної) підпорядкованості та форм власності підприємств і фірм, що його виробляють.

У разі переходу від господарських галузей до чистих галузей потрібне спеціальне перетворення реальних даних господарських об’єктів, наприклад агрегування галузей, вилучення внутрішньогалузевого обігу і т. ін. Тоді поняття «міжпродуктовий баланс» і «міжгалузевий баланс» практично ідентичні, відмінність полягає лише в одиницях, якими вимірюють елементи балансу.

Балансові моделі належать до матричного типу економіко-математичних моделей, оскільки вони будуються у вигляді матриць — прямокутних таблиць чисел. У матричних моделях балансовий метод набуває строгого математичного вираження. Отже, матрична структура притаманна міжгалузевому і міжрайонному балансу виробництва й розподілу продукції в народному господарстві, моделям розвитку галузей, міжгалузевим балансам виробництва й розподілу продукції окремих регіонів, моделям підприємств і фірм. Попри специфіку цих моделей їх поєднує не лише загальний формальний (матричний) принцип побудови та спільність системи розрахунків, а й аналогічність низки економічних характеристик.

Завдяки цьому структуру, зміст і основні залежності матричних моделей можна досліджувати на прикладі однієї з них, а саме моделі міжгалузевого балансу виробництва й розподілу продукції в економіці. Цей баланс відбиває виробництво й розподіл суспільного продукту за галузями, міжгалузеві виробничі зв’язки, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення й розподіл національного доходу.

Принципову схему міжгалузевого балансу виробництва й розподілу сукупного суспільного продукту у вартісному виразі наведено в табл. 7.1. В основу цієї схеми покладено поділ сукупного продукту на дві частини — проміжний і кінцевий продукт. Усе народне господарство подається у вигляді сукупності n («чистих») галузей, при чому кожна з них фігурує в балансі як така, що виробляє і споживає.

Таблиця 7.1

ПРИНЦИПОВА СХЕМА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ (МГБ)

Галузі, що виробляють продукцію	Галузі, що споживають продукцію					Кінцевий продукт	Валовий продукт
1	11	12	13		1*n*	*Y* 1	X_1
2	21	22	23		2*n*	*Y* 2	X_2
3	31	32	33		3*n*	*Y* 3	X_3
.						.	.
.						**I** **I**	.
.						.	.
n	*n*1	*n*2	*n*3		*nn*	*Y* *n*	X_n
Амортизація Оплата праці Чистий дохід	1 1 1	2 2 2	3 3 3	**II**	*n* *n* *n*	**I** **V**	
Валовий продукт	1	2	3		*n*		$\sum_{i=1}^{n} X_i =$]

Розглянемо чотири великі складові схеми МГБ, що мають різний економічний зміст — так звані ***квадранти балансу*** (на схемі їх позначено римськими цифрами I—IV).

Квадрант I — це шахова таблиця міжгалузевих матеріальних зв’язків. Показники, розміщені на перетині її рядків і стовпців, являють собою значення міжгалузевих потоків продукції й у загальному вигляді позначаються x_{ij}, де i, j — номер галузі, що виробляє і, відповідно, споживає продукцію. Наприклад, коефіцієнт x_{32} характеризує вартість засобів виробництва, вироблених у галузі з номером 3 і спожитих як матеріальні витрати в галузі з номером 2. Отже, квадрант I за формою являє собою квадратну матрицю порядку n, сума всіх елементів якої дорівнює річному фонду відшкодування витрат засобів виробництва в матеріальній сфері.

У квадранті II подано кінцевий продукт усіх галузей матеріального виробництва. Під кінцевою розуміють продукцію, що надходить зі сфери виробництва в галузь кінцевого використання (на споживання й нагромадження). У табл. 7.1 цей розділ подано у вигляді стовпця величин Y_i. У розгорнутій схемі балансу кінцевий продукт кожної галузі відбивають диференційовано, за напрямками використання: особисте споживання населення, суспільне споживання, нагромадження, відшкодування втрат, експорт тощо.

Отже, квадрант II у згорнутому вигляді характеризує галузеву матеріальну структуру національного доходу, а в розгорнутому — також і поділ національного доходу на фонд нагромадження і фонд споживання, структуру споживання і нагромадження за галузями виробництва та споживачами.

Квадрант III також характеризує національний дохід, але з боку його вартісного складу як суми чистої продукції й амортизації. При цьому чисту продукцію розуміють як суму оплати праці та чистого доходу галузей. Суму амортизації c_j та чистої продукції $v_j + m_j$ деякої j-ї галузі називатимемо ***умовно чистою продукцією*** цієї галузі й позначатимемо надалі Z_j.

Квадрант IV розташований на перетині стовпців квадранта II (кінцевий продукт) і рядків квадранта III (умовно чиста продукція). Цим визначається його зміст: він відбиває кінцевий розподіл і використання національного доходу. У результаті перерозподілу створеного національного доходу утворюються кінцеві доходи населення, підприємств, держави. Дані квадранта IV важливі, коли йдеться про відображення в моделі МГБ доходів і витрат населення, джерел фінансування капіталовкладень, поточних витрат невиробничої сфери чи про аналіз загальної структури кінцевих доходів за групами споживачів. Вельми важливим є й те, що загальний підсумок квадранта IV, так само як II і III, має дорівнювати створеному за рік національному доходу.

Отже, міжгалузевий баланс поєднує в єдиній моделі баланси галузей матеріального виробництва, баланс сукупного суспільного продукту, баланси національного доходу, фінансовий баланс, а також баланс доходів і витрат населення. Варто наголосити, що хоча валова продукція галузей не входить до розглянутих щойно чотирьох квадрантів, вона присутня на принциповій схемі МГБ у двох місцях — як стовпець, розміщений праворуч від квадранта II, і як рядок нижче від квадранта III. Зазначені стовпець і рядок валового продукту закінчують схему МГБ і відіграють важливу роль як для перевірки правильності заповнення квадрантів (тобто перевірки самого балансу), так і для розробки економіко-математичної моделі МГБ.

Позначаючи згідно зі схемою МГБ валовий продукт деякої галузі буквою X з нижнім індексом, що дорівнює номеру даної галузі, запишемо два найважливіші співвідношення, що відбивають сутність МГБ і є основою його економіко-математичної моделі.

По-перше, розглядаючи схему балансу за стовпцями, доходимо такого висновку: підсумок матеріальних витрат будь-якої галузі, що споживає, та її умовно-чистої продукції дорівнює валовій продукції цієї галузі. Цей висновок можна подати у вигляді співвідношення:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j, \quad j = \overline{1,n}. \tag{7.1}$$

Нагадаємо, що вартість умовно-чистої продукції Z_j дорівнює сумі амортизації, оплати праці та чистого доходу j-ї галузі. Співвідношення (7.1) охоплює систему з n рівнянь, що відбивають вартісний склад продукції всіх галузей матеріальної сфери.

По-друге, розглядаючи схему МГБ за рядками для кожної галузі, що виробляє продукцію, можна побачити, що валова продукція такої галузі дорівнює сумі матеріальних витрат галузей, які споживають її продукцію, та її власної кінцевої продукції:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_j, \quad i = \overline{1,n}. \tag{7.2}$$

Формула (7.2) описує систему з n рівнянь, які називають ***рівняннями розподілу продукції галузей матеріального виробництва за напрямками використання***.

Підсумувавши за всіма галузями, дістанемо:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j .$$

Аналогічно підсумовуємо рівняння (7.2):

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i .$$

Ліві частини обох рівностей однакові, оскільки подають весь валовий суспільний продукт. Перші доданки правих частин цих рівностей також однакові й становлять підсумок квадранта I. Отже, має виконуватись співвідношення:

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i . \qquad (7.3)$$

Ліва частина рівняння (7.3) — підсумок квадранта III, а права частина — підсумок квадранта II. Загалом це рівняння показує, що в міжгалузевому балансі дотримано найважливішого принципу єдності матеріального й вартісного складу національного доходу.

3. Економіко-математична модель міжгалузевого балансу

Як уже зазначалося, основу інформаційного забезпечення моделі МГБ становить технологічна матриця, що містить коефіцієнти прямих матеріальних витрат на виробництво одиниці продукції. Ця матриця є також основою економіко-математичної моделі МГБ.

Припустимо, що для виробництва одиниці продукції в j-й галузі потрібно витратити певний обсяг a_{ij} проміжної продукції i-ї галузі. При цьому значення a_{ij} не залежить від обсягу виробництва в цій галузі і є досить стабільним у часі. Величини a_{ij} називаються ***коефіцієнтами прямих матеріальних витрат*** і обчислюються так:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i, j = \overline{1,n}. \qquad (7.4)$$

Означення. ***Коефіцієнтом прямих матеріальних витрат*** називається коефіцієнт, який показує скільки продукції i-ї галузі необхідно (якщо враховувати тільки прямі витрати) для виробництва одиниці продукції j-ї галузі.

Узявши до уваги (7.4), систему рівнянь балансу (7.2) можна переписати у вигляді:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (7.5)$$

Нехай $A = (a_{ij})$ — матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат, X — вектор-стовпець валової продукції і Y — вектор-стовпець кінцевої продукції. Тоді система рівнянь (7.5) у матричній формі набирає вигляду:

$$X = AX + Y . \qquad (7.6)$$

Система рівнянь (7.5), або, у матричній формі, (7.6), називається ***економіко-математичною моделлю міжгалузевого балансу*** (***моделлю Леонтьева***, ***моделлю «витрати— випуск»***). За допомогою цієї моделі, позначивши, як завжди, символом E одиничну матрицю, виконувати три варіанти розрахунків:

- задавши в моделі обсяги X_i валової продукції кожної галузі, визначають обсяги Y_j кінцевої її продукції: $Y = (E - A)X$;
- задавши обсяги Y_i кінцевої продукції всіх галузей, знаходять обсяг X_i обсягу валової продукції кожної галузі: $X = (E - A)^{-1}Y$;
- задавши обсяги валової продукції для низки галузей, а для решти галузей — обсяги кінцевої продукції, відшукують обсяги кінцевої продукції перших галузей і обсяги валової продукції других (у цьому варіанті зручніше користатися не матричною формою моделі (7.6), а системою лінійних рівнянь (7.5)).

У наведених співвідношеннях $(E - A)^{-1}$ — матриця, обернена до матриці $(E - A)$. Якщо визначник матриці $(E - A)$ не дорівнює нулю, тобто ця матриця невироджена, то обернена до неї матриця існує. Позначивши цю обернену матрицю через $Y = (E - A)^{-1}$, можна систему рівнянь у матричній формі (7.6) подати у вигляді $X = BY$.

Нехай b_{ij} — елементи матриці B. Тоді з матричного рівняння для будь-якої i-ї галузі можна дістати таке співвідношення:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (7.7)$$

Із (7.7) випливає, що обсяг валової продукції виступає як зважена сума обсягів кінцевої продукції, причому вагами є коефіцієнти b_{ij}, що показують, скільки всього потрібно виготовити продукції i-ї галузі, щоб у сферу кінцевого використання надійшла одиниця продукції j-ї галузі. На відміну від коефіцієнтів a_{ij} прямих витрат коефіцієнти b_{ij} називаються ***коефіцієнтами повних матеріальних витрат*** і охоплюють як прямі, так і непрямі витрати всіх порядків. Якщо прямі витрати відбивають кількість засобів виробництва, витрачених безпосередньо під час виготовлення певного продукту, то непрямі стосуються попередніх стадій виробництва і входять у виробництво продукту опосередковано через інші (проміжні) засоби виробництва.

Означення. ***Коефіцієнтом повних матеріальних витрат*** b_{ij} називається коефіцієнт, який показує скільки продукції i-ї галузі потрібно виробити, щоб з урахуванням прямих і непрямих її
витрат одержати одиницю кінцевої продукції j-ї галузі.

Коефіцієнти повних матеріальних витрат застосовують, щоб з'ясувати, як позначиться на валовому випуску деякої галузі передбачувана зміна обсягів кінцевої продукції всіх галузей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_j ,$$

де ΔX_i, ΔY_j — зміна (приріст) обсягу відповідно валової і кінцевої продукції.

Переходячи до аналізу моделі МГБ, розглянемо передусім основні властивості матриці A коефіцієнтів прямих матеріальних витрат. Коефіцієнти прямих витрат за означенням є невід'ємними. Окрім цього, оскільки відтворення було б неможливим, коли б для власного відтворення в галузі витрачалося більше продукту, ніж створювалося, то діагональні елементи матриці A, очевидно, менші за одиницю: $a_{ij} < 1$.

Система рівнянь міжгалузевого балансу відбиває реальні економічні процеси, в яких сенс можуть мати лише невід'ємні значення валових випусків. Отже, вектор валової продукції складається з невід'ємних компонентів, тобто є невід'ємним: $X \geq 0$.

Постає запитання: за яких умов економічна система здатна забезпечити додатний кінцевий випуск за всіма галузями? Відповідь на це запитання пов'язана з поняттям ***продуктивності матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат***.

Називатимемо невід'ємну матрицю A ***продуктивною***, якщо існує невід'ємний вектор $X \geq 0$, такий що

$$X > AX. \qquad (7.8)$$

Умова (7.8) означає, очевидно, існування додатного вектора кінцевої продукції Y для моделі МГБ (7.6).

Для того щоб матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A була продуктивною, необхідно і достатньо, щоб виконувалась одна з наведених далі умов:

1) існує невід'ємна матриця $(E - A)^{-1} \geq 0$;

2) матричний ряд

$$E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

збіжний, причому його сума дорівнює матриці $(E - A)^{-1}$;

3) найбільше за модулем власне значення матриці A, тобто розв’язок характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$, строго менше від одиниці;

4) усі головні мінори матриці $(E - A)$, тобто визначники матриць, утворені елементами перших рядків і перших стовпців цієї матриці, порядку від 1 до n, додатні.

Простішою, але тільки достатньою ознакою продуктивності матриці A є обмеження на її норму, тобто на значення найбільшої із сум елементів матриці A в кожному стовпці. Якщо норма матриці A строго менша за одиницю, то ця матриця продуктивна. Ще раз наголосимо, що ця умова є тільки достатньою, і матриця A може бути продуктивною і тоді, коли її норма більша за одиницю.

Найбільший за модулем корінь характеристичного рівняння, наведеного в умові 3 продуктивності матриці A (позначимо його через λ^*), може бути оцінкою загального рівня коефіцієнтів прямих матеріальних витрат, а отже, значення $(1 - \lambda^*)$ характеризує залишок після витрат, тобто продуктивність. Чим більше $(1 - \lambda^*)$, тим більші можливості досягти ще й інших цілей, крім поточного виробничого споживання. Це означає, що вищий загальний рівень коефіцієнтів матриці A, тим більше найбільше за модулем власне значення λ^* і тим нижчий рівень продуктивності, та навпаки: чим нижчий загальний рівень коефіцієнтів матриці A, тим менше найбільше за модулем власне значення і тим вища продуктивність.

Проаналізуємо матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат, тобто матрицю $B = (E - A)^{-1}$. Коефіцієнт цієї матриці показує, скільки всього потрібно виробити продукції i-й галузі, щоб одержати одиницю кінцевої продукції j-ї галузі.

Наведемо ще одне визначення коефіцієнта повних матеріальних витрат, узявши до уваги, що крім прямих витрат існують непрямі виробничі витрати під час виготовлення тієї чи іншої продукції будь-якої галузі. Розглянемо, наприклад формування витрат електроенергії на випуск сталевого прокату, обмежившись технологічним ланцюжком «руда — чавун — сталь — прокат». Витрати електроенергії, що супроводжують виплавлення прокату зі сталі, називатимуться прямими витратами. Відповідні витрати в разі виплавлення сталі з чавуну дістануть назву непрямих витрат 1-го порядку, а витрати електроенергії, необхідні для одержання чавуну з руди, — непрямих витрат 2-го порядку і т. д. Отже, можна навести таке означення:

Означення. ***Коефіцієнтом повних матеріальних витрат*** c_{ij} називається сума прямих і непрямих витрат продукції i-ї галузі для виробництва одиниці продукції j-ї галузі з урахуванням усіх проміжних продуктів на всіх попередніх стадіях виробництва.

Нехай $a_{ij}^{(k)}$ — коефіцієнт непрямих матеріальних витрат k-го порядку. Тоді виконується формула

$$c_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \ldots + a_{ij}^{(k)} + \ldots,$$

або, у матричному вигляді:

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(k)} + \ldots.$$

Згідно зі змістом коефіцієнтів непрямих матеріальних витрат запишемо матричні співвідношення:

$$A^{(1)} = AA = A^2; A^{(2)} = AA^{(1)} = AA^2 = A^3; \ldots ; A^{(k)} = AA^{(k-1)} = AA^k = A^{k+1},$$

скориставшись якими матричну формулу можна подати у вигляді

$$C = A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} A^k .$$

Якщо матриця A коефіцієнтів прямих матеріальних витрат є продуктивною, то з умови 2 продуктивності випливає існування матриці $B = (E - A)^{-1}$, що є сумою збіжного матричного ряду:

$$B = \left(E - A\right)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k .$$

Порівнюючи два останні співвідношення, встановлюємо такий зв'язок між двома матрицями коефіцієнтів повних матеріальних витрат: $B = E + C$, або, у поелементному запису:

$$b_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{якщо} \quad i \neq j; \\ 1 + c_{ij}, & \text{якщо} \quad i = j. \end{cases}$$

Цей зв'язок визначає економічний зміст розбіжності між коефіцієнтами матриць B і C: на відміну від коефіцієнтів матриці C, що враховують тільки витрати на виробництво продукції, коефіцієнти матриці B крім витрат містять також саму одиницю кінцевої продукції, що виходить за сферу виробництва.

До найважливіших аналітичних можливостей моделей МГБ належить визначення векторів кінцевої та валової продукції. Різні модифікації розглянутої щойно моделі МГБ виробництва й розподілу продукції в економіці дають змогу розширити коло показників, охоплюваних моделлю. МГБ застосовують, наприклад, аналізуючи такі важливі економічні показники, як праця, фонди, оптові та споживчі ціни тощо. Зокрема, за допомогою МГБ на основі прямих і повних витрат праці на одиницю продукції можна побудувати балансові продуктово-трудові моделі, в яких вихідною моделлю є звітний міжпродуктовий баланс у натуральному виразі.