

ТЕМА 6. ОСНОВНІ ЗАСАДИ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ПРОЦЕСІВ

План

1. Поняття «моделі» та «моделювання»
2. Моделювання методом «чорної скриньки»
3. Ізоморфні та гомоморфні системи
4. Економіко-математичне моделювання

Література:

1. Браверман Э. М. Математические модели планирования и управления в экономических системах. — М.: Наука, 1976. — 368 с.
2. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2003. — 408 с.
3. Геєць В., Скрипниченко М., Соколик М., Шумська С. Секторальні макромоделі прогнозування економіки України // Економіст. — 1998. — № 5. — С. 58—67.
4. Гранберг А. Г. Математические модели социалистической экономики: Учеб. пособие для экон. вузов и фак. — М.: Экономика, 1978. — 351 с.
5. Иванюлов Ю. П., Лотов А. М. Математические модели в экономике. — М.: Наука, 1979. — 304 с.
6. Колмаев В. А. Математическая экономика: Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ, 1998. — 240 с.

1. Поняття «моделі» та «моделювання»

Термін «модель» широко вживаний не лише в науковій літературі, причому залежно від ситуації в нього вкладається різний зміст. Слово «модель» походить від латинського «modulus», що означає міра, мірило, зразок, норма.

У найширшому сенсі під словом «модель» розуміють деякий образ об'єкта (зокрема, умовний чи уявний), що нас цікавить, або, навпаки — прообраз деякого об'єкта чи системи об'єктів. Наприклад, глобус — модель Земної кулі, фотографія — модель зображеного на ній об'єкта; карта — модель місцевості і т. ін. Що ж до розуміння моделі як прообразу, то можна згадати, наприклад, модель автомобіля, експоновану на виставці, за якою надалі почнеться масове виготовлення таких автомобілів.

Під моделюванням розуміють дослідження об'єктів пізнання не безпосередньо, а непрямо шляхом, вивченням деяких інших допоміжних об'єктів.

Аналогією називають судження про будь-яку подібність у деякому сенсі двох об'єктів. Визначення ступеня істотності подібності чи відмінності об'єктів є умовним і відносним. Істотність подібності (відмінності) залежить від погляду спостерігача і визначається конкретною задачею. Сучасна наукова гіпотеза створюється, як правило, на підставі аналогії з виконаними на практиці науковими дослідженнями. Отже, аналогія пов'язує гіпотезу з експериментом.

Гіпотези й аналогії, що відбивають світ, який реально, об'єктивно існує, мають бути наочними і зводитися до зручних для дослідження логічних схем. Такі логічні схеми, що спрощують міркування та логічні побудови або дають змогу проводити експерименти для уточнення природи явища, називаються **моделями**.

Іншими словами: **модель** — це деякий об'єкт-замінник об'єкта-оригіналу, що забезпечує вивчення деяких істотних, з погляду дослідника, властивостей оригіналу.

Заміщення одного об'єкта іншим із метою здобуття інформації про найважливіші властивості об'єкта-оригіналу за допомогою об'єкта-моделі називається **моделюванням**. Таким чином, моделювання полягає в заміні об'єкта моделлю з метою дістати інформацію про цей об'єкт, виконуючи експерименти з його моделлю. Теорія заміщення одних об'єктів (оригіналів) іншими (моделями) і дослідження властивостей об'єктів на їхніх моделях називається **теорією моделювання**.

Якщо результати моделювання підтверджуються і можуть бути основою для прогнозування процесів, що відбуваються в об'єкті-оригіналі, то говорять, що модель **адекватна** об'єктові. При цьому адекватність моделі залежить від мети моделювання і прийнятих критеріїв.

Перше й основне запитання, що постає у процесі моделювання: на якій підставі за властивостями моделі можна робити висновки про властивості об'єктів, що нас цікавлять? Єдиної відповіді на це запитання не існує. У кожному окремому дослідженні необхідно добре усвідомити, на чому ґрунтується впевненість і можливість перенесення здобутих у дослідженні результатів із моделі на оригінал.

Друге запитання — а навіщо потрібно використовувати якісь допоміжні об'єкти (моделі) і навіщо розв'язувати складну проблему адекватності, якщо, можливо, простіше було б досліджувати об'єкт безпосередньо?

Передусім із практичних міркувань: моделі вибираються таким чином, щоб вони були значно простіші для дослідження, ніж об'єкти, що нас цікавлять. Більш того, деякі об'єкти взагалі не вдається досліджувати суто експериментально. Особливо це стосується економічних об'єктів та систем. Наприклад, пізнавальний експеримент на базі економіки будь-якої країни практично неможливий, а коли б його й здійснили, то наслідки були б дуже сумними. Окрім того, моделювання дає змогу виявляти найістотніші фактори, що впливають на поведінку оригіналу.

Основні типи моделей. *Натурні моделі.* У разі натурального моделювання оригінал (об'єкт) і модель тотожні. Такі моделі широко використовуються в техніці з метою випробувати окремі види продукції чи агрегатів: на стадії складання певну частину виробів (електронних мікросхем, двигунів, автомобілів тощо) піддають тестуванню.

Фізичні моделі. Фізичне моделювання передбачає, що об'єкт і модель мають однакову фізичну природу. Саме такими є, скажімо, літак і його геометрична модель. На цій підставі за результатами продування моделі в аеродинамічній трубі роблять висновки про аеродинамічні якості літака. Зв'язок між характеристиками літака та його моделі встановлюється згідно з теорією подібності.

Аналогові моделі. Аналогове моделювання ґрунтується на аналогії явищ, що мають різну фізичну природу, але описуються однаковими математичними рівняннями. Найпростіший приклад: вивчення механічних коливань за допомогою електричної схеми, фізичні процеси в якій описуються тими самими диференціальними рівняннями, що й коливання.

Знакові моделі. У знаковому моделюванні моделями є знакові утворення деякого виду. Розглядають вербальні моделі, схеми, графи, графіки, креслення, математичні вирази, формули тощо, причому знакові утворення та їхні елементи завжди задаються разом із тими законами (правилами), відповідно до яких ними можна оперувати.

Математичні моделі. Найважливішим видом знакового моделювання є математичне моделювання, коли моделі будуються (описуються) засобами математики і логіки.

Для економічної кібернетики найбільшу практичну цінність становить економіко-математичне моделювання, спрямоване на дослідження економічних систем засобами математичного моделювання з урахуванням специфіки економіки та використанням здобутків економічних дисциплін (економічної теорії, макро- та мікроекономіки, менеджменту тощо).

2. Моделювання методом «чорної скриньки»

Незважаючи на те, що як засіб пізнання невідомих об'єктів людство здавна використовує метод «чорної скриньки», останній усе ж пов'язують з електротехнікою. Інженерові пропонується наглухо зачинена шухляда (скринька) із вхідними клемми, до яких він на свій розсуд може приєднувати будь-яку електричну напругу, імпульси та інші впливи, і з вихідними клемми, на яких він може спостерігати вихідні сигнали. Завдання інженера —

з'ясувати стосовно вмісту шухляди все, що він зможе (закон функціонування, внутрішню структуру і т. ін.).

Позначивши, наприклад, вхідні впливи $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, а вихідні $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$, маємо встановити вигляд функціональної залежності $Y = F(X)$ (рис. 6.1).



Рис. 6.1. Модель «чорної скриньки»

Ця проблема часто постає безпосередньо, коли потрібно перевірити прилад — справний він чи ні, чи відповідає він стандарту. Проте сфера застосування методу «чорної скриньки» значно ширша. Наприклад, лікар, що обстежує хворого, ставить йому низку запитань-тестів (входи) і на підставі відповідей (виходи) та власного досвіду робить певні висновки щодо діагнозу.

Із застосуванням «чорної скриньки» ми стикаємося повсякчас, перемикаючи телевізор, працюючи за комп'ютером, керуючи автомобілем тощо.

Розглянемо методологію «чорної скриньки». Припустимо, що як вхід X , так і вихід Y піддаються зміні незалежно від їхньої фізичної природи.

Надаючи ряд значень вхідній змінній X_i , діставатимемо ряд значень іншої змінної Y_j , тобто ряд спостережень (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

X	X_1	X_2	X_n
Y	Y_1	Y_2	Y_n

Отже, первинні дані всякого дослідження «чорної скриньки» утворюються тільки з послідовності значень вектора з двома складовими — входу та виходу. Діставши доволі довгі ряди спостережень, експериментатор розпочинає пошук закономірностей у поведженні скриньки, пошук повторюваності такого поведження.

Якщо система не детермінована, тобто перетворення вхід—вихід не є однозначним, експериментатор може піти одним із двох шляхів:

1-й шлях — змінити множину входів і виходів, узявши до уваги більшу кількість змінних та збільшивши кількість спостережень, а далі з'ясувати, чи є нова система детермінованою;

2-й шлях — відмовитися від пошуків строгої детермінованості й спробувати відшукати статистичну закономірність.

3. Ізоморфні та гомоморфні системи

Ізоморфними системами з погляду кібернетичного моделювання називаються системи, однакові для спостерігача, якому доступні лише входи та виходи цих систем.

Отже, умовою ізоморфності систем A і B є така система рівностей для довільного елемента (моменту часу) t :

$$\begin{cases} X_{1A}(t) = X_{1B}(t) \\ X_{2A}(t) = X_{2B}(t) \\ \dots \\ X_{nA}(t) = X_{nB}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_{1A}(t) = Y_{1B}(t) \\ Y_{2A}(t) = Y_{2B}(t) \\ \dots \\ Y_{mA}(t) = Y_{mB}(t) \end{cases}$$

Тут ізоморфізм тлумачиться як ідентичність поведження розглядуваних систем у деякому середовищі, з яким вони контактують через свої входи та виходи. При цьому системи A і B можуть мати різну фізичну природу. Ізоморфні системи є ідеальними функціональними моделями одна одної.

Гомоморфізм. Нехай маємо дві системи, структуру яких ілюструє рис. 6.2.

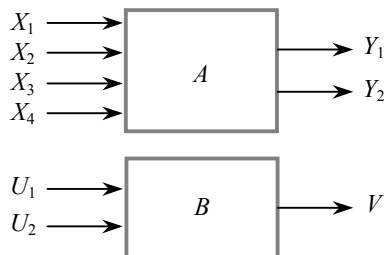


Рис. 6.2. До означення гомоморфізму

При цьому залежність між входами та виходами має вигляд:

$$U_1 = X_1 + X_2,$$

$$U_2 = X_3 + X_4,$$

$$V = Y_1 + 3Y_2.$$

У такому разі системи A і B уже не будуть ізоморфними, та й структура в них різна: модель Y «простіша», має менше входів і виходів. Але зауважимо таке: для кожного стану системи A маємо тільки один цілком визначений стан системи B , тобто за станом системи A ми однозначно можемо визначити стан системи B .

Наприклад, якщо значення параметрів для системи A буде $\{X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 5, X_4 = 2, Y_1 = 7, Y_2 = 4\}$, то для системи B дістанемо $\{U_1 = 4, U_2 = 7, V = 19\}$.

Але якщо ми задамо якийсь стан системи B , то однозначно визначити стан системи A не зможемо — у системи A можлива множина станів. Наприклад, якщо для системи B маємо $\{U_1 = 5, U_2 = 4, V = 10\}$, то для системи A дістанемо 6 змінних і 3 рівняння:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 5, \\ X_3 + X_4 = 4, \\ Y_1 + Y_2 = 10. \end{cases}$$

Отже, система A не буде однозначно визначеною. Таку відповідність називають **гомоморфізмом** (рис. 6.3).

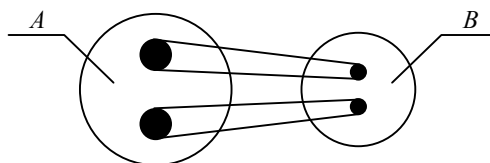


Рис. 6.3. Гомоморфні системи

Нехай система A — оригінал. Для цієї системи побудуємо модель B . Система A має розмірність n , а B — розмірність $m < n$. Якщо при цьому кожному стану A відповідає один цілком визначений стан B , але не кожному стану B відповідає один стан A , то систему B називають **гомоморфною моделлю** системи A .

Взагалі, створюючи модель B системи A ми намагаємося, як правило, втілити в цій моделі найбільш істотні властивості системи A , відкидаючи множину менш істотних властивостей з метою спрощення моделі. У результаті цього спрощення розмірність моделі B завжди буде меншою за розмірність A (тобто $m < n$).

Отже, модель — це гомоморфний образ оригіналу.

Модель «чорної скриньки» у вивченні великих економічних систем. З погляду «чорної скриньки» системи, що мають однакові входи та виходи й однаково реагують на зовнішні впливи, є ізоморфними, хоча за внутрішньою структурою вони можуть бути різними.

Модель «чорної скриньки» незамінна під час вивчення великих, зокрема й економічних систем. Зауважимо, що докладно вивчати поведження таких систем, впливаючи на їхні входи та спостерігаючи за виходами, як правило, неможливо, оскільки потребувало б надто багато часу. Навіть тоді, коли б ми мали у своєму розпорядженні всю інформацію про стан усіх елементів системи, навряд чи можна було б скласти повне уявлення про її поведження. Адже за величезної кількості зв'язків між елементами наявну інформацію не вдається звести в єдине ціле.

У цьому разі потрібно реальну складну економічну систему замінити іншою, простішою, але такою, що функціонує аналогічно. Отож економічну систему розглядають як «чорну скриньку» і будують її спрощену модель, причому сама «чорна скринька» і модель, що її відтворює, описуються однаковими математичними співвідношеннями.

За такого абстрагування однозначним перетворенням реальної економічної системи дістають простішу модель, вилучаючи неістотні змінні, з певним наближенням оцінюючи значення істотних змінних, апроксимуючи нелінійні та стохастичні залежності лінійними й детермінованими, і т. ін. Здобута модель буде гомоморфною і, якщо зроблені припущення є достатньо обґрунтованими, то й адекватною моделлю складної реальної економічної системи.

Завдяки спрощенню реальної системи дістаємо однозначну відповідність її стану гомоморфній моделі, а також неоднозначність оберненої відповідності.

4. Економіко-математичне моделювання

Дослідження математичної моделі дає змогу діставати характеристики реального економічного об'єкта чи системи. Тип математичної моделі залежить як від природи системи, так і від задач дослідження. У загальному випадку математична модель системи містить опис множини можливих станів останньої та закон переходу з одного стану до іншого (закон функціонування).

Розглянемо основні типи економіко-математичних моделей (ЕММ), які класифікують за різними критеріями.

За цільовим призначенням ЕММ поділяються на *теоретико-аналітичні*, застосовувані для дослідження загальних властивостей і закономірностей економічних процесів (наприклад, модель Кейнса), та *прикладні*, призначені для розв'язування конкретних економічних задач (моделі економічного аналізу, прогнозування, управління тощо).

ЕММ можуть бути призначені для дослідження як різних функціональних складових економіки (виробничо-технологічної, соціальної, територіальної структури), так і його окремих частин. Розглядають моделі всієї економіки в цілому та її підсистем — секторів, галузей, регіонів, комплексів моделей виробництва, споживання, формування та розподілу прибутків, трудових ресурсів, ціноутворення, фінансових зв'язків тощо.

Згідно із загальною класифікацією математичних моделей вони поділяються на *функціональні* та *структурні*, охоплюючи проміжні форми (структурно-функціональні). У дослідженнях на макрорівні найчастіше використовуються структурні моделі, оскільки для планування та управління велике значення мають взаємозв'язки підсистем. Типовими структурними моделями є моделі міжгалузевих зв'язків. Функціональні моделі широко застосовуються в економічному регулюванні, коли на поведження об'єкта («вихід») впливають, змінюючи «вхід». Прикладом може бути модель поведінки споживачів за умов товарно-грошових відносин. Один і той самий об'єкт може описуватися водночас як структурною, так і функціональною моделлю.

За характером відображення причинно-наслідкових зв'язків розрізняють *детерміновані* моделі та моделі, що враховують випадковість і невизначеність — *стохастичні*.

Залежно від урахування часового чинника економіко-математичні моделі поділяються на *статичні* та *динамічні*. У статичних моделях усі залежності стосуються одного моменту або періоду часу. Динамічні моделі характеризують зміни економічних процесів у часі.

За тривалістю періоду часу, що розглядається, розрізняють моделі *короткострокового* (до року), *середньострокового* (до 5 років), *довгострокового* (10—15 і більше років) прогнозування та планування. Час в економіко-математичних моделях може змінюватися неперервно або дискретно. Тому розрізняють *неперервні* та *дискретні* моделі

Моделі економічних процесів надзвичайно різноманітні за формою математичних залежностей. У загальному випадку виокремлюють *лінійні* та *нелінійні* моделі. Особливо важливим є клас лінійних моделей, найзручніших для аналізу й розрахунків, завдяки чому вони набули великого поширення.

Відмінності між лінійними та нелінійними моделями істотні не лише з математичного, а й з теоретико-економічного погляду. Адже численні залежності в економіці як на макро-, так і на мікрорівні мають принципово нелінійний характер: вплив податкової та грошово-кредитної політики на економічних суб'єктів, ефективність використання ресурсів з розширенням виробництва, зміна обладнання, моделі управління запасами тощо. Теорія «лінійної економіки» істотно відрізняється від теорії «нелінійної економіки». Від того, якими — опуклими чи неопуклими — вважаються множини виробничих можливостей підсистем (галузей, підприємств), істотно залежать висновки про можливість поєднання централізованого планування та господарської самостійності економічних підсистем.

За співвідношенням екзогенних і ендогенних змінних, які включаються до моделей, останні поділяють на *відкриті* і *замкнені*. Повністю відкритих моделей не існує; модель повинна мати хоча б одну ендогенну змінну. Повністю замкненими (такими, що не містять жодної екзогенної змінної) економіко-математичні моделі бувають надзвичайно рідко. Загалом економіко-математичні моделі різняться за ступенем відкритості.

Макроекономічні моделі поділяють на *агреговані* та *деталізовані*. Залежно від того, чи містять ці моделі просторові чинники та умови, чи ні, розрізняють моделі *просторові* та *точкові*.

Отже, загальна класифікація ЕММ охоплює понад десять основних ознак. З розвитком економіко-математичних досліджень проблема класифікації застосовуваних моделей дедалі ускладнюється. Поряд з появою нових типів моделей (особливо мішаних типів) і нових ознак їх класифікації відбувається інтеграція моделей різних типів у складніші модельні конструкції.

Розглянемо основні етапи економіко-математичного моделювання. Процес моделювання передбачає наявність трьох структурних елементів:

- об'єкта дослідження;
- суб'єкта (дослідник);
- моделі, яка опосередковує відносини між суб'єктом і об'єктом.

Побудова ЕММ у загальному випадку складається з розглянутих далі етапів.

1. Постановка економічної проблеми та її якісний аналіз. На цьому етапі потрібно сформулювати сутність проблеми, визначити передумови й висловити припущення. Необхідно виокремити найважливіші властивості об'єкта моделювання, вивчити його структуру, дослідити взаємозв'язки між його елементами, а також хоча б попередньо сформулювати гіпотези, що пояснюють поведінку й розвиток об'єкта (динаміку руху), дослідити його зв'язки із зовнішнім середовищем тощо.

При цьому складні об'єкти розбиваються на частини (елементи) окремого дослідження: визначаються зв'язки та логічні співвідношення між ними, їхні кількісні та якісні властивості. Зазначені дії становлять етап системного аналізу задачі, у результаті якого об'єкт подається у вигляді системи.

2. Побудова математичної моделі. Цей етап полягає у формалізації економічної моделі, тобто вираженні її у вигляді кон-кретних математичних залежностей (функцій, рівнянь, нерівностей тощо). Процес побудови моделі складається з кількох стадій. Спочатку визначають тип економіко-математичної моделі, вивчають можливості її застосування в розглядуваному конкретному випадку, уточнюють перелік змінних та параметрів, форми зв'язку між ними. Для складних об'єктів доцільно будувати кілька різноаспектних моделей.

3. Математичний аналіз моделі. На цьому етапі суто математичними прийомами досліджують загальні властивості моделей та розв'язків. Може статися, що раніше виконаний системний аналіз привів до такого набору елементів, властивостей і співвідношень, для якого немає прийняттого методу розв'язання задачі. Тоді доводиться повернутися до етапу системного аналізу. Важливим моментом є доведення існування розв'язків сформульованої задачі. У процесі аналітичного аналізу з'ясовують кількість розв'язків (єдиний чи неєдиний), визначають змінні та параметри, які можуть входити до розв'язку, а також межі та тенденції їх зміни.

Проте моделі складних економічних об'єктів дуже погано піддаються аналітичному дослідженню. У таких випадках переходять до чисельних методів дослідження. Як правило, задачі, що виникають в економічній практиці, намагаються звести до відомих моделей, для яких розроблено методи й алгоритми розв'язання.

4. Підготовка вихідної інформації. В економічних задачах це, як правило, найбільш трудомісткий етап моделювання, оскільки тут замало самого лише пасивного збору даних. Математич-

не моделювання висуває жорсткі вимоги до якості інформації. У процесі підготовки інформації використовуються методи теорії ймовірностей, математичної статистики, а також економічної статистики для агрегування, групування даних, оцінювання вірогідності даних тощо.

У процесі системного економіко-математичного моделювання результати функціонування одних моделей виступають вихідною інформацією для інших.

5. Чисельне моделювання. Цей етап передбачає розробку алгоритмів чисельного розв'язання задачі, підготовку комп'ютерних програм та безпосереднє виконання розрахунків. При цьому постають значні труднощі, зумовлені великою розмірністю економічних задач. Для великих складних об'єктів може знадобитися складання бази даних та відшукування засобів роботи з нею, а також методів добування даних, потрібних для розрахунків. У разі стандартних задач здійснюється вибір придатного пакета програм та системи управління базами даних (СУБД). Чисельне моделювання істотно доповнює результати аналітичного дослідження.

6. Аналіз чисельних результатів та їх застосування. На цьому етапі передусім з'ясовується найважливіше питання щодо правильності й повноти результатів моделювання та можливості їх практичного використання, а також досліджуються можливі напрямки подальшого вдосконалення моделі.

Тому спершу перевіряють адекватність моделі за тими властиво-стями, що було взято за найістотніші. Тобто потрібно виконати верифікацію і валідацію моделі, оскільки головна мета моделювання полягає в розв'язуванні практичних задач (аналіз економічних об'єктів, економічне прогнозування, вироблення управлінських рішень і т. ін.).

***Верифікація моделі** — перевірка правильності структури (логіки) моделі.*

***Валідація моделі** — перевірка відповідності здобутих у результаті моделювання даних реальному процесу в економіці.*

Перелічені етапи економіко-математичного моделювання перебувають у тісному взаємозв'язку, зокрема можуть існувати зворотні зв'язки між етапами. Так, на етапі побудови моделі може з'ясуватися, що постановка задачі суперечлива чи призводить до занадто складної математичної моделі. Тоді вихідну постановку доводиться коригувати.

Найчастіше потреба повернутися до попереднього етапу постає на етапі підготовки вихідної інформації. Якщо необхідної інформації немає або її пошук тягне за собою великі витрати, доводиться повернутися до етапу формалізації і пристосовуватися до наявної інформації.

Отже, моделювання являє собою циклічний процес. За останнім етапом необхідно переходити до першого й уточнювати постановку задачі згідно зі здобутими результатами, потім — до другого й уточнювати (коригувати) математичний модуль, далі — до третього і т. д.