

Максимальное время:

100 секунд

Предельное число итераций:

100

Относительная погрешность:

0,000001

Допустимое отклонение:

5 %

0,0001

OK

Отмена

Загрузить модель...

Сохранить модель...

Справка

Excel

и нелинейные алгебраические уравнения

Теоретическая справка

Довольно часто на практике при моделировании различных процессов (экономических, физических, технических, социальных и др.) приходится сталкиваться с задачами, решение которых сводится к численному решению нелинейных уравнений. Так, например, непосредственно к решению таких уравнений сводятся многие задачи теоретической и строительной механики, задачи по сопротивлению материалов и др.

Как известно из курса вычислительной математики, корнем уравнения $f(x) = 0$, где функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором интервале $[a; b]$, называется такое значение $x^* \in [a; b]$, при котором функция $f(x)$ обращается в нуль.

Приближенное вычисление корней уравнения обычно состоит из следующих двух этапов [1].

1. Отделение корней, т. е. установление возможно тесных промежутков, в которых содержится строго по одному корню данного уравнения, причем каждый такой отрезок называется отрезком изоляции корня.

2. Уточнение приближенных значений корней, т. е. доведение их до заданной точности.

Обычно процесс отделения корней, исходя из физического смысла задачи, проводят графически или с помощью таблиц значений функции $f(x)$. Подробную информацию об имею-

щихся приемах реализации этого процесса можно найти, например, в [1].

Второй этап приближенного вычисления корня уравнения $f(x) = 0$ можно осуществить с помощью множества разработанных для этой цели методов уточнения корня, среди которых наиболее известны:

- метод половинного деления (он же — метод бисекции);
- метод хорд;
- метод касательных (он же — метод Ньютона);
- метод последовательных приближений (метод итераций).

Следует отметить, что авторы не преследовали цель изложить в данной статье курс численных методов решения нелинейных уравнений с той или иной степенью полноты. Основные задачи статьи:

- на конкретном примере показать возможности пакета Excel при решении нелинейных уравнений;
- продемонстрировать, каким эффективным инструментом решения подобных задач является надстройка «Поиск решения» [2,3];
- проиллюстрировать, как относительно легко такие задачи могут быть решены даже пользователем, не владеющим глубокими знаниями по численным методам.

Предложенная в статье методика по овладению навыками решения средствами Excel такого рода задач (см. также [4, 5], где приведены методики решения в Excel систем линейных ал-

гебраических уравнений и задач оптимизации) интересна тем, что пакет Excel установлен практически на каждом современном компьютере, в то время как такие известные специализированные математические пакеты, как *Mathematica*, *Maple*, *Matlab*, *MathCAD*, имеющие специальные встроенные функции для получения численного решения нелинейных уравнений, используются значительно меньшей пользовательской аудиторией.

Ниже на конкретном примере рассматривается решение задачи об определении равновесной цены продукции, которое сводится к численному решению нелинейного уравнения.

Пример

На фирме, реализующей некоторые изделия, специалисты по маркетингу определили функцию спроса $p = d(q)$ и функцию предложения $p = s(q)$ относительно количества изделий q , приобретенного потребителями или предложенного для продажи по цене p , где

$$d(q) = 150 - 5q;$$

$$s(q) = 0,25q^2 + 0,5q + 70$$

Необходимо, используя надстройку «Поиск решения», найти равновесную цену продукции, а также решить эту задачу графически.

Решение

Для определения равновесной цены продукции следует найти координату точки пересечения функций спроса

и предложения. Для этого необходимо записать целевую функцию в виде

$$R(q) = d(q) - s(q)$$

и найти решение уравнения $R(q) = 0$.

Вот как это решение можно найти в Excel.

В диапазоне ячеек **A1:D2** формируем исходную таблицу (рис. 1).

1. В ячейку **A2** заносим начальное приближение корня уравнения, т. е. начальное количество изделий, приобретенных потребителями. Примем его равным 1.

2. В ячейку **B2** заносим формулу для функции спроса $=150 - 5 * A2$.

Напоминаем, что для этого следует с клавиатуры набрать знак равенства и в строке формул записать выражение $150 - 5 *$, затем левой кнопкой мыши щелкнуть на ячейке с адресом **A2** — и Excel занесет этот адрес ячейки в продолжение нашей формулы. Визуально в строке формул проверяем, верно ли записано наше выражение, и нажимаем клавишу «Ок».

В ячейку **C2** записываем формулу для функции предложения:

$$=0,25 \times A2^2 + 0,5 \times A2 + 70$$

В ячейку **D2** вводим выражение для вычисления целевой функции **B2–C2**.

В результате экран у вас должен выглядеть как на рис. 1. А в режиме отображения формул — как на рис. 2.

Далее из меню «Сервис» следует вызвать команду «Поиск решения». При этом откроется диалоговое окно, изображенное на рис. 3. Ставим курсор в поле «Установить целевую ячейку» и набираем адрес ячейки **D2** с абсолютной ссылкой, т. е. **\$D\$2**. Поскольку необходимо найти решение уравнения $R(q) = 0$, то в переключателе «Равной значению» записываем значение правой части уравнения (т. е. 0). В поле «Изменяя ячейки» заносится абсолютный адрес ячейки **\$A\$2**.

Теперь все исходные данные, необходимые для выполнения процедуры поиска решения, введены. Для запуска процесса решения задачи следует щелкнуть по кнопке «Выполнить». В строке состояния будет отображаться ход решения задачи. Затем на экране появится диалоговое окно «Результаты поиска решения» с информацией о том, найдено или нет искомое

	A	B	C	D
	Кол-во товара q	Функция спроса d(q)	Функция предложения s(q)	Целевая функция R(q)=d(q)-s(q)
1				
2	1	145,00	70,75	74,250000000

Рис. 1. Исходная таблица

	A	B	C	D
1	Кол-во товара q	Функция спроса d(q)	Функция предложения s(q)	Целевая функция R(q)=d(q)-s(q)
2	1	=150-5*A2	=0,25*A2^2+0,5*A2+70	=B2-C2

Рис. 2. Содержимое ячеек исходной таблицы

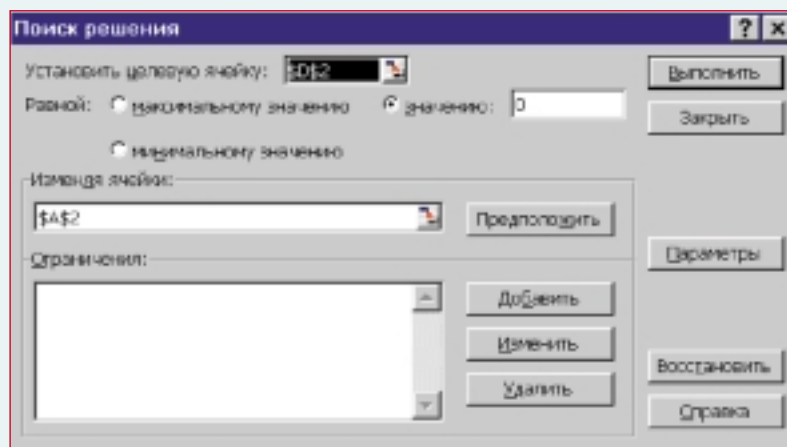


Рис. 3. Диалоговое окно надстройки «Поиск решения»

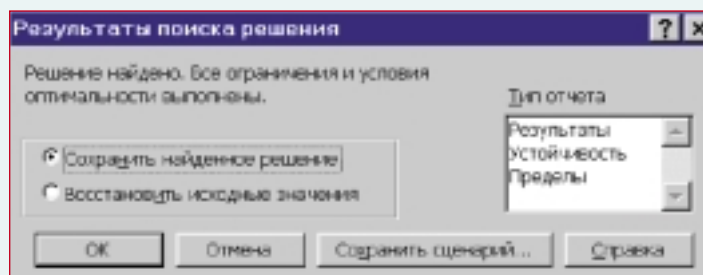


Рис. 4. Диалоговое окно «Результаты поиска решения»

решение. Если решение найдено (рис. 4), то далее следует выбрать один из следующих возможных вариантов:

- сохранить найденное решение, т. е. заменить исходные значения в изменяемых ячейках на значения, полученные в результате решения задачи;
- восстановить исходные значения в изменяемых ячейках.

Для создания отчетов о ходе процесса поиска решения следует выбрать необходимый отчет из списка типов отчетов («Результаты», «Устойчивость», «Пределы»).

Для сохранения решения в виде сценария, который может быть ис-

пользован в дальнейшем, в средстве «Диспетчер сценариев» следует щелкнуть на кнопке «Сохранить сценарий» и дать этому сценарию имя.

Если в результате выполнения процедуры поиска решения само решение не будет найдено (об этом появится сообщение в диалоговом окне «Результаты поиска решения»), хотя известно, что такое решение существует, то очень часто подобную проблему удастся решить, изменив одну или несколько опций в диалоговом окне «Параметры поиска решения» и повторно запустив процедуру поиска решения. Чтобы появилось диалоговое окно «Параметры поиска решения»,

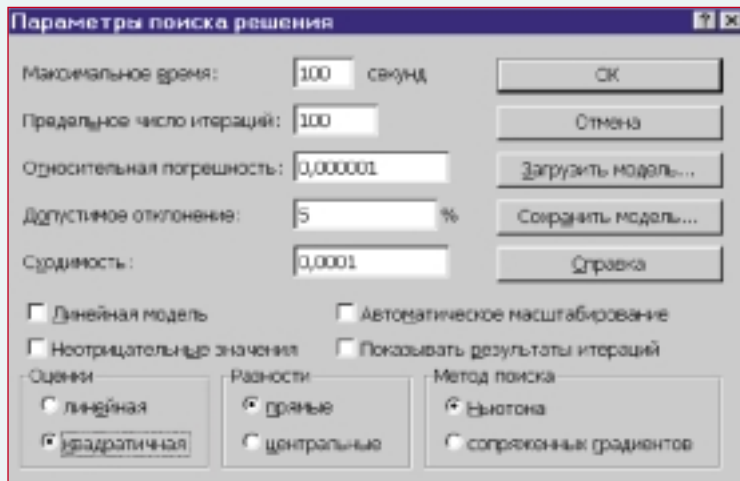


Рис. 5. Диалоговое окно «Параметры поиска решения»

	A	B	C	D
	Кол-во товара q	Функция спроса d(q)	Функция предложения s(q)	Целевая функция R(q)=d(q)-s(q)
1	10	100,00	100,00	-0,000006314

Рис. 6. Результаты решения уравнения $R(q) = 0$

	Кол-во товара q	Функция спроса d(q)	Функция предложения s(q)	Целевая функция R(q)
4	0	150,00	70,00	80,000
5	5	125,00	78,75	46,250
6	10	100,00	100,00	0,000
7	15	75,00	133,75	-58,750
8	20	50,00	180,00	-130,000

Рис. 7. Таблица значений исследуемых функций

	Кол-во товара q	Функция спроса d(q)	Функция предложения s(q)	Целевая функция R(q)
4	0	=150-5*A5	=0,25*A5^2+0,5*A5+70	=B5-C5
5	5	=150-5*A6	=0,25*A6^2+0,5*A6+70	=B6-C6
6	10	=150-5*A7	=0,25*A7^2+0,5*A7+70	=B7-C7
7	15	=150-5*A8	=0,25*A8^2+0,5*A8+70	=B8-C8
8	20	=150-5*A9	=0,25*A9^2+0,5*A9+70	=B9-C9

Рис. 8. Содержимое ячеек таблицы на рис. 7

которое изображено на рис. 5, щелкните в диалоговом окне «Поиск решения» на кнопке «Параметры». Подробнее об опциях диалогового окна «Параметры поиска решения» будет сказано ниже.

Остается щелкнуть по клавише «Ок» в диалоговом окне «Результаты поиска решения», чтобы получить решение уравнения, приведенное на рис. 6.

Итак, из таблицы на рис. 6 следует, что решением уравнения $R(q) = 0$ является значение $q = 10$, т. е. для получения равновесной цены необходимо иметь 10 изделий, причем равновесная цена равна 100 — функция спро-

са (ячейка B2) совпадает с функцией предложения (ячейка C2).

Ниже с помощью пакета Excel приведено графическое решение уравнения $R(q) = 0$.

- Для построения графика в Excel предварительно необходимо задать диапазон значений для величины q . Например, возьмем значение количества изделий, приобретенных потребителями, начиная с нуля и с шагом в пять единиц, и запишем его в диапазон ячеек A5:A9.
- В ячейку B5 записываем формулу для функции спроса $= 150 - 5 \times A5$ и копируем набранную нами фор-

мулу в диапазон ячеек B6:B9 с относительными ссылками, т. е. ссылки перенастраиваются на новые адреса ячеек.

- в ячейку C5 записываем формулу для функции предложения $= 0,25 \times A5^2 + 0,5 \times A5 + 70$ и копируем формулу с относительными ссылками в диапазон ячеек C5:C9.
- формулу $= B5 - C5$ для целевой функции записываем в ячейку D5 и копируем ее с относительными ссылками в диапазон ячеек D5:D9. Получим таблицу, представленную на рис. 7–8.

Используя стандартную методику построения и оформления диаграмм в пакете Excel с помощью «Мастера диаграмм», на основе таблицы значений исследуемых функций из рис. 7 получаем графики, приведенные на рис. 9–10.

На рис. 9 приведено графическое решение данного уравнения. Из рисунка видно, что значение $q = 10$ является корнем уравнения $R(q) = 0$, т. е. при $q = 10$ будем иметь равновесную цену.

Исследуя поведение графиков функций спроса и предложения (рис. 10), можно сделать некоторые выводы. Интерес представляет точка пересечения кривых спроса и предложения — точка равновесия ($q = 10$). Соответствующая этой точке цена называется равновесной ценой ($p = 100$). Пересечение графиков при $p = 100$ означает, что спрос и предложение при этой цене совпадают, т. е. весь произведенный товар раскупается. При ценах ниже равновесной ($p < 100$), т. е. когда спрос превышает предложение ($s(q) < d(q)$), возникает «дефицит» товара и производители могут повышать цену: рыночная цена при этом будет повышаться до равновесной. Если же цена будет выше равновесной цены ($p > 100$), т. е. предложение превысит спрос ($s(q) > d(q)$), то часть продукции остается нерезализованной, что вынудит производителей снизить цену, и следовательно, рыночная цена будет снижаться до равновесной. Следует отметить упрощенность рассмотренной здесь модели, так как цена — не единственный фактор, определяющий изменение спроса и предложения.

О параметрах поиска решения

Разберем несколько подробнее опции диалогового окна «*Параметры поиска решения*» (см. рис. 5). С их помощью можно управлять процессом решения задачи.

Примечание. Если вы не считаете себя опытным математиком, то лучше в качестве параметров использовать их значения, заданные по умолчанию.

Параметры процедуры поиска решений следующие.

Максимальное время. Опция служит для ограничения времени, отпускаемого на поиск решения задачи. В поле можно ввести время (в секундах), не превышающее 32767, причем значение 100, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства простых задач. При достижении максимального времени поиск решения прекращается.

Предельное число итераций. Эта опция служит для управления временем решения задачи, ограничивая число итераций, а следовательно — и объемом промежуточных вычислений.

Относительная погрешность. Эта опция служит для задания точности решения. Она может принимать произвольные значения в интервале от 0 до 1. Чем точнее определяется решение задачи (то есть чем меньше значение относительной погрешности), тем больше времени требуется средству «*Поиск решения*» для нахождения решения.

Допустимое отклонение — максимальное отклонение в процентах для

целочисленных решений. Его следует устанавливать только для целочисленных ограничений.

Сходимость. Эта опция служит для прекращения процесса поиска решения, если относительное изменение значения в целевой ячейке за последние пять итераций становится меньше числа, указанного в текстовом поле «*Сходимость*». Это число может принимать произвольные значения в интервале от 0 до 1. Опция «*Сходимость*» применяется только к нелинейным задачам.

Линейная модель. Эта опция позволяет ускорить поиск решения линейной задачи или линейной аппроксимации нелинейной задачи.

Неотрицательные значения. Позволяет установить нулевую нижнюю границу для тех ячеек, для которых она не была указана в поле «*Ограничения*» диалогового окна «*Добавить*».

Показывать результаты итераций. Если в диалоговом окне установлен флажок опции «*Показывать результаты итераций*», то средство «*Поиск решения*» делает паузу после каждой итерации, чтобы показать вам промежуточные результаты. Появляется диалоговое окно «*Текущее состояние поиска решения*». Чтобы выполнить следующую итерацию, щелкните на кнопке «*Продолжить*». Если вы удовлетворены результатами и захотите остановиться, щелкните на кнопке «*Стоп*». Для сохранения текущих данных, прежде чем продолжить — щелкните на кнопке «*Сохранить сценарий*».

Автоматическое масштабирование.

Эта опция служит для включения автоматической нормализации входных и выходных значений, качественно отличающихся по величине, например — максимизация прибыли в процентах по отношению к вложениям, исчисляемых в миллионах гривен.

Примечание. Если вы установили флажок опции «*Автоматическое масштабирование*», убедитесь, что изменяемые ячейки содержат значения того же порядка, который вы ожидаете увидеть в ответе. Нежелательно при запуске «*Поиска решения*» начинать изменяемые ячейки с нуля.

Раздел «*Оценки*» служит для указания метода экстраполяции, используемого для получения исходных оценок значений переменных в каждом одномерном поиске: При этом переключатель «*Линейная*» служит для использования линейной экстраполяции вдоль касательного вектора, а переключатель «*Квадратичная*» — для использования квадратичной экстраполяции, которая дает лучшие результаты при решении нелинейных задач.

В разделе «*Разности*» следует установить переключатель «*Прямые*», если решение задачи — гладкая и непрерывная функция (как, например, в линейной модели). Если же функция имеет разрывную производную, то установите переключатель «*Центральные*». Но при этом «*Поиск решения*» может выдать сообщение о том, что не может улучшить результат.

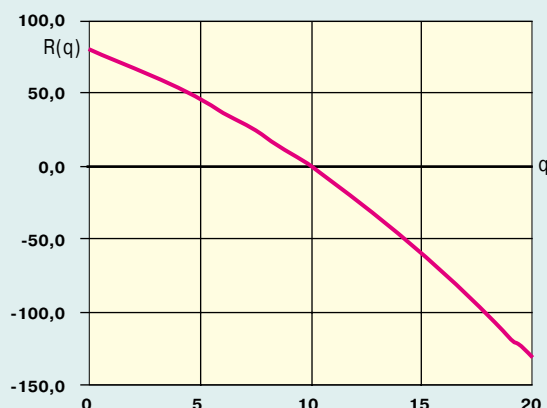


Рис. 9. Графическое решение уравнения $R(q) = 0$

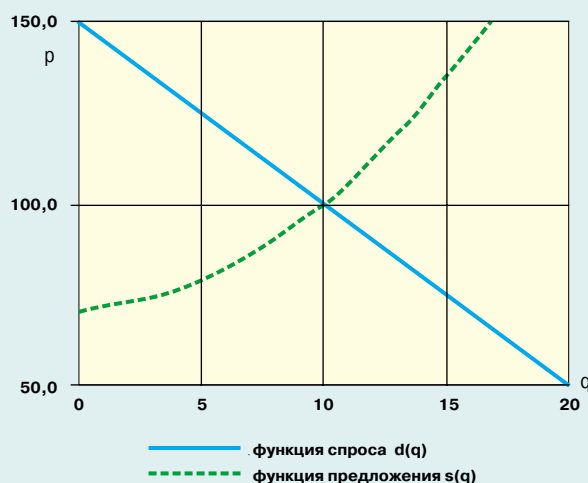


Рис. 10. Поведение функций спроса и предложения

В разделе «Метод поиска» можно выбрать алгоритм оптимизации — направление поиска для каждой итерации. С помощью установленного *переключателя Ньютона* лучше всего решать простые задачи. Этот метод поиска более быстрый и требует для решения задачи меньшего числа итераций, хотя обычно требует больше памяти, чем метод сопряженных градиентов. Если задача достаточно сложная, то попробуйте установить *переключатель сопряженных градиентов*.

Если вы щелкнете в диалоговом окне «Параметры поиска решения» на кнопке «Сохранить модель», то появится соответствующее диалоговое окно. По умолчанию «Поиск решения» предполагает, что вы желаете сохранить модель, которая начинается с активной ячейки. Щелкните на рабочем листе Excel, чтобы указать начальную ячейку или диапазон ячеек.

Примечание. Следует быть осторожными при сохранении модели «Поиска решения». Если активная ячейка содержит данные, то модель будет сохранена с ними. Советуем сохранять рабочий лист перед сохранением модели.

При сохранении модели сохраняются целевые ячейки, изменяемые ячейки, ограничения и опции средства «Поиск решения». В зависимости от того, как много ограничений вы определили, будет изменяться вертикальное количество ячеек. Каждая ячейка содержит формулу или ссылку. В рабочем листе вы можете сохранить несколько моделей средства «Поиск решения». Проверьте, что вы сохраняете каждую модель, выбирая диапазон, который не содержит данных. Советуем присвоить имя каждому диапазону модели средства «Поиск решения» — в дальнейшем ее легче будет загружать.

Обычно модель сохраняют только при использовании нескольких различных наборов параметров поиска решений для рабочего листа. Параметры для первой модели поиска решений запоминаются автоматически в рабочем листе (используются скрытые имена). Если вы запоминаете дополнительные модели, информация записывается в виде формул, которые соответствуют вашим установкам (последняя ячейка в сохраняемом диапазоне представляет собой формулу массива, которая со-

держит установки опций). Для загрузки этих установок используется диалоговое окно, вызываемое с помощью кнопки «Загрузить модель».

Литература

1. Б.П. Демидович, И.А. Марон. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. — 664 с.
2. Дж. Уокенбах. Excel 97. Библия пользователя. — К.: Диалектика, 1997. — 624 с.
3. П. Дж. Бернс, Дж. Р. Николсон. Секреты Excel для Windows 95. — К.: Диалектика, 1996. — 576 с.
4. В.В. Гавриленко, Л.М. Парохненко. Excel и системы линейных алгебраических уравнений // Компьютеры + Программы. — 2001. — № 7. — С. 50–51.
5. В.В. Гавриленко, Л.М. Парохненко. Excel и задачи линейного программирования // Компьютеры + Программы. — 2001. — № 12. — С. 46–49.

ГАВРИЛЕНКО В.В.,
доктор физ.-мат. наук, профессор
ПАРОХНЕНКО Л.М.,
ассистент
(Национальный транспортный университет)



20 февраля, во время работы выставки EnterEX, Украину посетил Бен Ли (Ben Lee) — менеджер Европейского отделения AOpen по линейке корпусов и систем barebone¹. Так как AOpen является одним из самых популярных и ходовых «брендов» на нашем рынке, мы не могли упустить возможность поговорить с его представителем.

Нас, в основном, интересовали результаты продвижения высококачественных корпусов AOpen на наш и европейский рынки, а также то, насколько отечественный пользователь

Трехкратный рост AOpen

готов к осознанию необходимости покупки качественных корпусов. По результатам нашей беседы кратко можно сказать следующее:

- за истекший год AOpen продала в Европе около 1 млн. корпусов;
- в Украине за минувший год прирост продаж корпусов увеличился почти втрое;
- в текущем году планируется, как минимум, сохранить существующие темпы роста;
- кроме корпусов для ПК, AOpen производит и собирается активно продвигать в Украине rackmount-корпуса (монтируемые в стойку) для серверов, высотой в 4, 3, и 2 юнита, а также одноюнитовый barebone. Сейчас корпуса AOpen сертифицируются компанией Intel, кроме того, AOpen — один из самых крупных

OEM-поставщиков корпусов для производителей серверов;

- AOpen не планирует продавать отдельно свои блоки питания.

Господин Ли ответил и на несколько наших вопросов, не связанных напрямую с его подразделением. В частности, нас интересовали взаимоотношения компаний внутри Acer Group, куда входит и AOpen. AOpen создавалась как подразделение по производству компонентов и позже выделилась в отдельную компанию. Свою основную направленность она сохранила и поныне, хотя внутри Acer Group она иногда конкурирует с другими поставщиками — в частности, с Acer Peripherals (на нашем рынке активно конкурируют CD-приводы AOpen и Acer), которая теперь будет называться Benq.

AOpen активно сотрудничает с ALI (поставщиком чипсетов, который входит в Acer Group), однако не отдает ни ему, ни любому другому поставщику каких-либо предпочтений.

¹ Русскоязычный термин, соответствующий Barebone, еще не устоялся, и пока используется не очень благозвучное «голые системы». Фактически это высокоинтегрированный комплект из корпуса и материнки, как правило, компактных или нестандартных типоразмеров — как для ПК, так и для серверов. Для изготовления готовой системы на базе Barebone необходимо добавить процессор, память и винчестер по вкусу ©.